

Notes de Géométrie Différentielle pour ingénieurs et physiciens.

Table des matières.

Notations

1 Notions sur les variétés différentiables.

1. Variétés différentiables, définitions
2. Variétés ayant un bord
3. Espace vectoriel tangent

2 Vecteurs, produits scalaires , normes.

1. Produit scalaire.
2. Distance de deux points.
3. Inégalité de Schwarz.
4. Courbes et vecteurs tangents.
5. Exemple : la sphère.
6. Changements de coordonnées.
7. Transformations.
8. Les rotations.
9. Interprétation des $g_{\alpha\beta}$ et méthode de Gramm-Schmidt.
10. Exemple d'application des notions précédentes : la relativité.
11. Espaces complexes, produit hermitien.

3 Tenseurs.

1. Exemple 1 : le tenseur métrique.
2. Exemple 2 : le gradient d'une fonction.
3. Indices covariants et contravariants.
4. Définition d'un tenseur.
5. Contraction des indices.
6. Exemple 3 : les dérivées d'un tenseur.
7. Application à la mécanique.
8. Tenseurs symétriques, antisymétriques.
9. Le tenseur totalement antisymétrique ε .
10. Deux exemples : le champ électromagnétique, le vecteur tourbillon.
11. Exemple de tenseur symétrique : le tenseur d'énergie impulsion.
12. Changement de coordonnées dans le cas complexe.

4 Eléments de volume, divergence d'un champ de vecteurs, laplacien d'une fonction.

1. Calcul du volume d'un parallélépipède.
2. Divergence d'un champ de vecteurs.
3. Différentielle du déterminant.
4. Laplacien d'une fonction.

5 Formes différentielles, Algèbre Extérieure (première partie).

1. Essai de justification.

2. Définition de l'algèbre extérieure.
3. Différentielle d'une forme.
4. Exemple : l'électromagnétisme.
5. Le théorème de Poincaré.
6. Changement de coordonnées, l'application φ^* .
7. Produit scalaire pour les formes différentielles, l'opérateur $*$ de Hodge.
8. Exemple
9. L'opérateur $*$ et les changements de coordonnées.

6 Formes différentielles (deuxième partie), Dérivée de Lie, champ de vecteurs.

1. L'opérateur δ .
2. Expression explicite de δ appliqué à une forme de degré 1.
3. Laplacien.
4. Dérivée de Lie, champs de vecteurs.
5. Commutateurs.
6. Exemple : l'algèbre de Poincaré.
7. L'opérateur i .
8. Autre expression de la dérivée de Lie.

7 Principe de moindre action , lagrangien .

1. Mécanique du point matériel, équations d'Euler Lagrange.
2. Principe de moindre action pour les champs.
3. Exemple : le champ électromagnétique

8 Métrique, géodésiques.

1. Métrique, repère local, repère naturel.
2. Les métriques spatio-temporelles de la Relativité Générale.
3. Géodésiques
4. Dynamique du point matériel
5. Les symboles de Christoffel ne sont pas des tenseurs.
6. Segments de géodésiques
7. Transformations.

9 Le transport parallèle.

1. L'exemple de la sphère S^2 .
2. Transport parallèle des repères locaux..
3. Changement de repère.
4. Dérivation absolue pour un tenseur.
5. Courbe auto parallèle
6. Le parallélogramme infinitésimal.
7. La dérivation absolue ne commute pas.
8. La courbure
9. La courbure scalaire, le tenseur de Ricci.
10. Le cas des espaces à deux dimensions sans torsion.
11. Les triangles géodésiques de la sphère S^2 .
12. Le théorème de Gauss-Bonnet.

10 La méthode du repère mobile.

1. Les premières équations de structure.

2. Les secondes équations de structure.
3. Les identités de Bianchi de première espèce.
4. Les identités de Bianchi de seconde espèce.
5. Dérivation absolue pour les formes.
6. Généralisation du commutateur des dérivées absolues.
7. Une autre formulation pour les équations de structure.
8. Les coefficients de la connexion en fonction des commutateurs
9. Matrices de formes différentielles.

11 Coordonnées normales de Riemann.

1. Les coordonnées normales.
2. Expressions de l'élément linéaire et de la connexion au voisinage de l'origine.
3. L'élément linéaire des espaces à courbure constante localement isotropes.
4. Les vecteurs des repères mobiles.
Annexe : chemins homotopes.

12 Compléments divers.

1. Faisceaux de géodésiques.
2. Coordonnées Gaussiennes.
3. Expression de $\Gamma_{\beta\alpha}^{\alpha}$, divergence d'un champ de vecteurs.
4. Laplacien d'un champ de vecteurs.
5. Transformations conformes.
6. Le tenseur de courbure après transformation conforme.
7. Le tenseur de Weyl.
8. Groupe de transformations conformes dans un espace euclidien.

13 Hypersurfaces.

1. Choix des repères mobiles, courbure extrinsèque.
2. Re paramétrisation de H .
3. Déformation de H .
4. Evolution de $K^i_{.rt}$ et de $\omega^j_{.it}$ lors d'une déformation de H .
5. Le tenseur de courbure.

14 Hyper surfaces (deuxième partie).

1. Surfaces géodésiques en un point, surfaces totalement géodésiques.
2. Surfaces à deux dimensions.
3. Espace isotropes en chacun de leur points.
4. Les espaces admettant des surfaces totalement géodésiques.
5. Symétrie par rapport à un plan.
6. Surfaces extrémales.
7. Transport par parallélisme d'une 2-surface.
8. Développement d'une géodésique d'une hyper-surface.
9. Plongement d'une variété dans l'espace euclidien : exemple du tore.

15 Groupes d'invariance, repères adaptés.

1. Définitions et propriétés fondamentales.
2. Repères mobiles adaptés.
3. Commutateurs pour les repères adaptés.
4. L'exemple de la sphère S^2 .

5. Equations de structure.
6. L'espace des paramètres du groupe.
7. Annexe 1 : Complexes associés à un sous groupe, groupe quotient.
8. Annexe 2 : Exemples

16 Les théories de jauge, le théorème de Noether.

1. Invariance de l'action et théorème de Noether.
 2. Translations
 3. Rotations des repères mobiles, le tenseur de spin.
 4. Le tenseur d'énergie impulsion.
 5. Un exemple simple : le champ scalaire complexe
 6. Les champs de jauge.
 7. Courants et tenseurs pour les champs de jauge.
 8. Un pont vers la topologie : les monopoles
- Annexe : Somme directe de deux algèbres de Lie

17 L'équation de Dirac.

1. L'équation de Dirac en espace de Minkowski, en bref.
2. Généralisation à un espace quelconque.
3. Lagrangien pour le champ de spineur.
4. Tenseur de spin et tenseur d'énergie impulsion.
5. Transport parallèle d'un spineur.
6. Equation du deuxième ordre.
7. Equation de Dirac-Kahler, produit de Clifford.

18 Espaces symétriques

1. Symétrie par rapport à un point, espace totalement symétrique.
2. Transvections.
3. Espaces symétriques irréductibles
4. Groupes de transformation

19 Eléments de Relativité Générale.

1. Choix du Lagrangien.
2. Variation de l'action pour le lagrangien d'Einstein-Hilbert.
3. Autres lagrangiens.
4. Perturbations au premier ordre.

20 Géométrie de H^n (première partie).

1. Coordonnées normales.
2. Coordonnées stéréographiques.
3. Géodésiques de H^n .
4. Les isométries de H^n .
5. Les géodésiques de H^n sont des arcs de grand cercle.
6. Surface d'un triangle géodésique.
7. Le disque de Poincaré.
8. Une autre représentation : le modèle de Klein.

21 Géométrie de H^n (deuxième partie).

1. Transvections

2. Les transvections de H^3 vues de M^4 .
3. Les transvections comme produits de symétries par rapport à des plans.
4. Vissages dans H^3 .
5. Produit de deux vissages.

Annexe : Formule de Hadamard et de Baker-Campbell-Hausdorff.

22 Géométrie de H^n (troisième partie).

1. Dièdre de deux plans.
2. Volume d'un tétraèdre.
3. Le tétraèdre idéal.
4. Pavage de H^3 par des figures régulières.
5. Quelques exemples de variétés hyperboliques compactes et orientables

23 Exemples.

1. Champ magnétique statique à symétrie cylindrique.
2. Propagation du champ électromagnétique dans le vide.
3. Perturbations d'une métrique cosmologique et application à la déviation des rayons lumineux
4. Formulation Hamiltonienne de la Relativité Générale

Appendice A. Les rotations.

1. Rappels.
2. Nombre de paramètres pour $SO(p,q)$.
3. Nombre de paramètres dans le cas complexe.
4. L'exemple de $SU(2)$.
5. L'exemple de $SO(3)$.
6. Sous espaces invariants. Vecteurs et valeurs propres.
7. Décomposition des rotations en produit de symétries par rapport à des plans.
8. Remarques complémentaires sur la symétrie par rapport à des plans.
9. Rotations infinitésimales.
10. Rotations infinitésimales dans le cas de l'espace euclidien à 3 dimensions.
11. Expression des opérateurs en coordonnées polaires.
12. Le groupe des rotations dans \mathbb{C}^3 : $SU(3)$.
13. Rudiments sur les algèbres complexifiées.

Appendice B : Rudiments sur les représentations des groupes continus et applications.

1. Quelques notions sur les représentations des algèbres de Lie.
2. Utilisation en physique.
3. Représentation conjuguée, état singulet.
4. Application à la construction de la fonction de corrélation d'un champ scalaire.

Appendice C : Expression des opérateurs vectoriels usuels en coordonnées cylindriques et sphériques.

Index

Références

