Moment magnétique d'un spineur de Majorana.

Rappels sur l'équation de Dirac.

Le plus simple est de définir les termes d'interaction au niveau du Lagrangien. Celui-ci doit être invariant de Lorentz, réel, et invariant de jauge.
Le lagrangien d'un champ de spineur libre est :

$$L = \tfrac{1}{2}\,(\,\overline{\psi}\,\gamma^{\alpha}\,i\partial_{\alpha}\psi + (\overline{\psi}\,\gamma^{\alpha}\,i\partial_{\alpha}\psi)^{+}\,) - m\overline{\psi}\,\psi \qquad (1)$$

qui redonne l'équation de Dirac : $i\,\gamma^{\alpha}\,\partial_{\alpha}\psi = m\psi$
et où les matrices de Dirac satisfont :

$$\gamma^{0+} = \gamma^{0} \quad , \quad (\gamma^{0}\gamma^{i})^{+} = \gamma^{0}\gamma^{i}$$

Pour introduire la charge électrique on utilise soit l'invariance de jauge : $\psi \to e^{i\,\alpha(x)}\,\psi$

$$L = \tfrac{1}{2}\,(\,\overline{\psi}\,\gamma^{\alpha}\,iD_{\alpha}\psi + (\overline{\psi}\,\gamma^{\alpha}\,iD_{\alpha}\psi)^{+}\,) - m\overline{\psi}\,\psi \quad , \quad D_{\alpha}\psi = \partial_{\alpha}\psi + i\,e\,A_{\alpha}\,\psi \qquad (2)$$

où $A^{\alpha} = (\phi, \vec{A})$ est le quadri potentiel électromagnétique ; soit on utilise le couplage minimum, qui consiste à ajouter à (1) un terme : $\overline{\psi}\,\gamma^{\beta}\,\psi\,A_{\beta}$. (Pour rappel, le courant $\overline{\psi}\,\gamma^{\beta}\,\psi$ se transforme comme un (quadri) vecteur par rotation ou transformation de lorentz, et est invariant de jauge). L'équation de Dirac devient :

$$i\,\gamma^{\alpha}\,D_{\alpha}\psi = i\,\gamma^{\alpha}(\partial_{\alpha}\psi + ieA_{\alpha}\psi) = m\psi \qquad (3)$$

Rappels sur la conjugaison de charge.

Pour trouver l'équation d'un particule ayant une charge opposée on prend le conjugué complexe de (3) : $\quad -i\,\gamma^{\alpha *}(\partial_{\alpha}\psi^{*} - ieA_{\alpha}\psi^{*}) = m\psi^{*}$
et on supposera que le spineur de l'antiparticule est de la forme : $\psi_{C} = C\,\psi^{*}$, où C est un opérateur linéaire. L'équation précédente devient :

$$-i\,C\,\gamma^{\alpha *}C^{-1}\,(\partial_{\alpha}\psi_{C} - ieA_{\alpha}\psi_{C}) = m\psi_{C}$$

Cette équation sera l'équation d'une particule de charge $-e$ et de spin 1/2 si C vérifie :

$$C\,\gamma^{\alpha *}C^{-1} = -\gamma^{\alpha} \qquad (4)$$

quel que soit α . Le spineur correspondant sera : $\psi_{C} = C\,\psi^{*}$.
Dans la représentation de Dirac des matrices γ^{α} pour la métrique de Minkowski de signature (+,- ,-,-) , C est donné par : $i\,\gamma^{2}$ où $\gamma^{2} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^{y} \\ -\sigma^{y} & 0 \end{pmatrix}$.

Introduction d'un moment magnétique.

Il faut ajouter au lagrangien un terme d'interaction dépendant des champs magnétiques et électriques. On choisit un terme de la forme :

$$g\,i\,\overline{\psi}\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}\psi\,F_{\alpha\beta} \qquad (5)$$

où : $F_{\alpha\beta} = \partial_{\alpha}A_{\beta} - \partial_{\beta}A_{\alpha}$ est le champ électromagnétique proprement dit ($F_{0i} = E^{i}$, $B^{i} = -\tfrac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\,F_{jk}$). $\overline{\psi}\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}\psi$ se transforme comme un tenseur d'ordre 2 par rotation ou

transformation de lorentz, le facteur i rend le terme réel, et g est une constante de couplage réelle.
L'équation de Dirac devient :

$$i\gamma^{\alpha}(\partial_{\alpha}\psi + ieA_{\alpha}\psi) + g\, i\, \gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}\psi\, F_{\alpha\beta} = m\psi \qquad (6)$$

En prenant le conjugué complexe et en faisant apparaître ψ_C, on obtient :

$$i\gamma^{\alpha}(\partial_{\alpha}\psi_C - ieA_{\alpha}\psi_C) - g\, i\, \gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}\psi_C\, F_{\alpha\beta} = m\psi_C$$

Un spineur de Majorana est une particule identique à son anti-particule, donc : $\psi_C \equiv \psi$ à une phase près. Donc nécessairement : $e = 0$ (on le savait déjà) et $g = 0$.
Une particule de Majorana de spin ½ n'a pas de moment dipolaire (électrique ou magnétique).