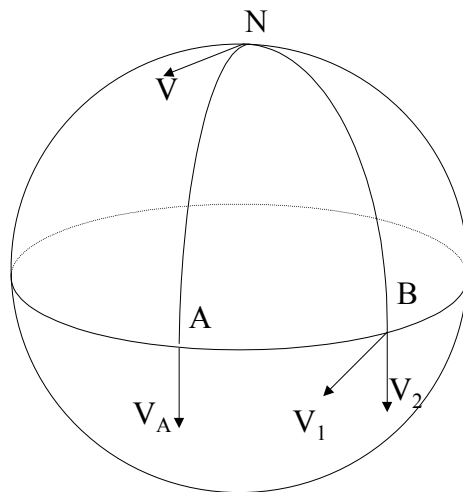


9. Transport parallèle, connexions, courbure.

1. L'exemple de la sphère S^2 .

La géométrie euclidienne « classique » est fondée sur les notions de parallélisme et de déplacements rigides. Un vecteur d'un plan, défini en un point M d'une droite et faisant un angle θ avec celle-ci, conserve l'angle qu'il fait avec cette droite si on le déplace parallèlement à lui-même le long de cette droite. Pour illustrer le transport parallèle dans un espace quelconque nous allons prendre l'exemple de la sphère S^2 . Considérons donc un triangle sphérique (dont les cotés sont des géodésiques) formés par deux demi-méridiens NA et NB et un arc d'équateur AB comme sur la figure ci-dessous.



Comme cela a été discuté au premier chapitre nous pouvons imaginer par plongement dans \mathbb{R}^3 un vecteur tangent à la sphère en un point de celle-ci. Supposons que le transport parallèle d'un vecteur le long d'une géodésique conserve l'angle qu'il fait avec celle-ci. Déplaçons le vecteur \vec{V} , tangent à l'arc NA en N, le long de l'arc NA puis le long de l'arc AB, on obtient le vecteur \vec{V}_2 . Le transport parallèle de \vec{V} le long de l'arc NB donne le vecteur \vec{V}_1 qui fait avec \vec{V}_2 un angle égal à l'angle \widehat{ANB} . L'angle entre \vec{V}_1 et \vec{V}_2 n'est pas nul comme il le serait si l'on avait effectué la même chose dans un plan. Cet exemple montre le rôle de la courbure de la surface et que le résultat d'un transport parallèle dépend du chemin suivi. Maintenant nous allons généraliser cet exemple.

2. Transport parallèle des repères locaux.

Soit une variété V^n de dimension n , et deux points M et M' de cette variété. Soient T_M et $T_{M'}$ les espaces vectoriels tangent respectifs en ces points. Soient une base $\{\vec{h}_a(M)\}$ de T_M et une base $\{\vec{h}_a(M')\}$ de $T_{M'}$. Le transport par parallélisme d'un vecteur « de M en M' » est une application de T_M dans $T_{M'}$. Si l'on désigne par $\vec{h}'_a(M')$ le transporté par parallélisme de $\vec{h}_a(M)$, ce vecteur s'écrira sur la base des vecteurs de $T_{M'}$ de manière générale :

$$\vec{h}'_a(M') = \vec{h}_a(M') - \omega^b_{.a} \vec{h}_b(M') \quad (1)$$

(le signe - est arbitraire à ce niveau), les coefficients $\omega^b_{.a}$ dépendent évidemment des points M et M' , mais aussi du chemin γ joignant ces points, et le long duquel on fera ce transport. On aurait donc dû écrire $\omega^b_{.a}(M, M', \gamma)$, mais dans la suite nous omettrons de préciser les points de départ et d'arrivée et le chemin.

Un vecteur quelconque $\vec{V}(M) = V^a(M) \vec{h}_a(M)$ sera donc transformé par (les composantes $V^a(M)$ ne sont que des nombres) :

$$\vec{V}'(M') = V^a(M) \vec{h}'_a(M') = V^a(M) \vec{h}_a(M') - V^a(M) \omega^b_{.a} \vec{h}_b(M') \quad (2)$$

Si les points M et M' sont infiniment proches, et si le chemin γ est le segment de géodésique joignant ces deux points, $\omega^b_{.a}$ ne dépend que de ces points. D'autre part, si M' est confondu avec M , les coefficients $\omega^b_{.a}$ sont nuls, donc au premier ordre on écrira :

$$\omega^b_{.a}(M, M') = \omega^b_{.a\gamma}(M) dx^\gamma \quad (3)$$

Les coefficients $\omega^b_{.a}$ et $\omega^b_{.a\gamma}$ seront appelés indifféremment coefficients de la connexion.

Si $\vec{V}(M)$ est un champ de vecteurs, on peut alors calculer la différence entre le vecteur au point M' et le transporté par parallélisme de $\vec{V}(M)$ en ce point :

$$\begin{aligned} \vec{V}'(M') - \vec{V}(M') &= (V^a(M) - V^a(M')) \vec{h}_a(M') - V^a(M) \omega^b_{.a} \vec{h}_b(M') \\ &= - (dV^a + \omega^a_{.b} V^b) \vec{h}_a(M') \end{aligned}$$

$$\text{On pose :} \quad DV^a = dV^a + \omega^a_{.b} V^b = dV^a + \omega^a_{.b\gamma} V^b dx^\gamma \quad (4)$$

DV^a s'appelle la différentielle absolue du champ de vecteurs \vec{V} .

La différence $\vec{V}'(M') - \vec{V}(M')$ est un vecteur, donc les quantités DV^a sont les composantes d'un vecteur. Ceci est un point très important, car nous avons vu au chapitre 3 que la dérivée ordinaire d'un champ de vecteurs n'est pas un tenseur.

Si $\vec{V}'(M')$ est le transporté parallèle du vecteur $\vec{V}(M)$ (M' infiniment proche de M), l'expression précédente montre que $DV^a = 0$. Donc :

Dans le transport parallèle d'un vecteur, la différentielle absolue de ce vecteur est nulle.

Inversement, on peut faire le transport de M' vers M , on aura alors si ces deux points sont infiniment proches (en restant au premier ordre) :

$$\vec{h}'_a(M) = \vec{h}_a(M) + \omega^b_{.a} \vec{h}_b(M) \quad (5)$$

Jusqu'ici nous n'avons fait que transcrire en termes de vecteurs et de composantes l'application de T_M dans $T_{M'}$.

Nous postulons désormais que le transport parallèle conserve les produits scalaires.

Ecrivons cette condition pour M et M' infiniment voisins:

En posant : $\eta_{ab}(M) = \vec{h}_a(M) \cdot \vec{h}_b(M)$; $\eta_{ab}(M') = \vec{h}_a(M') \cdot \vec{h}_b(M')$

le produit scalaire des transportés par parallélisme est au premier ordre:

$$\begin{aligned} \vec{h}'_a(M') \cdot \vec{h}'_a(M') &= \left(\vec{h}_a(M') - \omega^c_{.a} \vec{h}_c(M') \right) \cdot \left(\vec{h}_b(M') - \omega^d_{.b} \vec{h}_d(M') \right) \\ &= \eta_{ab}(M') - \omega^c_{.a} \eta_{cb}(M') - \omega^d_{.b} \eta_{ad}(M') \end{aligned}$$

mais la conservation du produit scalaire se traduit par :

$$\vec{h}'_a(M') \cdot \vec{h}'_a(M') = \eta_{ab}(M)$$

donc la conservation des produits scalaires dans le transport parallèle impose la contrainte :

$$d\eta_{ab} = \eta_{ab}(M') - \eta_{ab}(M) = \omega^c_{.a} \eta_{cb}(M') + \omega^d_{.b} \eta_{ad}(M') \quad (6)$$

On peut évidemment appliquer ces notions aux vecteurs des repères naturels.

Dans ce cas les vecteurs $\{\vec{h}_a(M)\}$ sont simplement les vecteurs $\{\vec{e}_\mu\}$, et l'on écrira :

$$\begin{aligned} \vec{e}'_\mu(M') &= \vec{e}_\mu(M') - \omega^\nu_{.\mu} \vec{e}_\nu(M') \\ DV^\mu &= dV^\mu + \omega^\mu_{.\nu} V^\nu = dV^\mu + \omega^\mu_{.\nu} V^\nu dx^\nu \\ dg_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu}(M') - g_{\mu\nu}(M) = \omega^\alpha_{.\mu} g_{\alpha\nu}(M') + \omega^\alpha_{.\nu} g_{\mu\alpha}(M') \end{aligned} \quad (7)$$

3. Changement de repère.

Nous avons vu plus haut que la différentielle absolue d'un vecteur est un vecteur, donc dans un changement de repère on doit avoir :

$$DV^\varphi = A^\varphi_{.\mu} DV^\mu$$

Nous en déduisons immédiatement comment se transforme les coefficients de la connexion dans un changement de repère de l'espace tangent :

Ecrivons comme ci dessus : $\vec{V}(M) = V^a(M) \vec{h}_a(M)$ et soit une deuxième base de vecteurs de l'espace tangent $\{\vec{f}_a(M)\}$, $\vec{V}(M) = V'^a(M) \vec{f}_a(M)$, et soit A la transformation qui fait passer d'une base à l'autre : $V^a = A^a_b V'^b$; $\vec{f}_a = A^b_a \vec{h}_b$.

Puisque les DV^a sont les composantes d'un vecteur, on doit avoir :

$$DV^a = A^a_b DV'^b$$

d'où la connexion se transforme comme :

$$\omega^a_{.b} = A^a_c \omega'^c_{.d} (A^{-1})^d_b + A^a_c d(A^{-1})^c_b \quad (8)$$

soit sous forme matricielle : $\omega = A \omega' A^{-1} + A dA^{-1}$.

Cette expression, qui ressemble à la transformation des symboles de Christoffel, montre que la connexion n'est pas un tenseur.

Cette expression s'applique aussi au passage d'un repère quelconque au repère naturel.

Posons

$$\vec{h}_a = h^\mu_a \vec{e}_\mu \quad ; \quad \vec{e}_\mu = h^a_\mu \vec{h}_a$$

on a donc :

$$\omega_{\cdot\rho}^{\mu} = h_a^{\mu} \left(dh_{\rho}^a + \omega_{\cdot b}^a h_{\rho}^b \right) \quad (9a)$$

ce qui, compte tenu de $d \left(h_b^{\rho} h_{\rho}^a \right) = 0$, se re-écrit :

$$\omega_{\cdot b}^a = h_{\mu}^a D h_b^{\mu} \quad (9b)$$

4. Dérivation absolue pour un tenseur.

La dérivation absolue pour une quantité scalaire se confond avec la dérivation ordinaire. On peut donc reprendre la démarche du chapitre 3.

D'abord, puisque la différentielle absolue (4) d'un champ de vecteurs est un champ de vecteurs, $DV^{\alpha} = D_{\beta} V^{\alpha} dx^{\beta}$ implique que $D_{\beta} V^{\alpha}$ est un tenseur.

Le produit scalaire de deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} s'écrit $S = u^a v^b \eta_{ab} = u^a v_a = u_b v^b$. On en déduit immédiatement que étant donné : $DV^a = dV^a + \omega_{\cdot b}^a V^b = dV^a + \omega_{\cdot b \gamma}^a V^b dx^{\gamma}$, si

on impose :

$$DS = dS = u_a Dv^a + Du_b v^b$$

c'est à dire que la dérivation absolue suit la loi de Leibnitz, on doit avoir :

$$DV_a = dV_a - \omega_{\cdot a}^b V_b = dV_a - \omega_{\cdot a \gamma}^b V_b dx^{\gamma} \quad (10)$$

D'une manière générale nous définirons la dérivée absolue d'un tenseur par des expressions du type :

$$DT^{a_1 \dots a_p} = dT^{a_1 \dots a_p} + \omega_{\cdot b_1}^{a_1} T^{b_1 \dots a_p} + \dots + \omega_{\cdot b_i}^{a_i} T^{a_1 \dots b_i \dots a_p} + \dots + \omega_{\cdot b_p}^{a_p} T^{a_1 \dots b_p} \quad (11a)$$

$$DT^{\alpha_1 \dots \alpha_p} = dT^{\alpha_1 \dots \alpha_p} + \omega_{\cdot \beta_1}^{\alpha_1} T^{\beta_1 \dots \alpha_p} + \dots + \omega_{\cdot \beta_i}^{\alpha_i} T^{\alpha_1 \dots \beta_i \dots \alpha_p} + \dots + \omega_{\cdot \beta_p}^{\alpha_p} T^{\alpha_1 \dots \beta_p} \quad (11b)$$

et si un tenseur contient des indices covariants le signe précédant la connexion change, par exemple :

$$DT_{\cdot \beta}^{\alpha} = dT_{\cdot \beta}^{\alpha} + \omega_{\cdot \gamma}^{\alpha} T_{\cdot \beta}^{\gamma} - \omega_{\cdot \beta}^{\delta} T_{\cdot \delta}^{\alpha} \quad (12)$$

Ainsi cela permet d'appliquer la règle de Leibnitz au produit contracté de deux tenseurs et d'obtenir des règles cohérentes pour la dérivation absolue et la contraction. De plus, on vérifie aisément que, avec la transformation (8), les différentielles absolues des tenseurs définies en (11) et (12) sont encore des tenseurs.

Avec ces définitions on peut donc écrire :

$$D\eta_{ab} = d\eta_{ab} - \omega_{\cdot a}^c \eta_{cb} - \omega_{\cdot b}^d \eta_{ad} \quad (13a)$$

et :

$$Dg_{\mu\nu} = dg_{\mu\nu} - \omega_{\cdot \mu}^{\alpha} g_{\alpha\nu} - \omega_{\cdot \nu}^{\alpha} g_{\mu\alpha} \quad (13b)$$

et vérifier que la différentielle absolue du produit scalaire $S = u^a v^b \eta_{ab} = u^{\alpha} v^{\beta} g_{\alpha\beta}$ est bien simplement égale à sa différentielle ordinaire.

Un tenseur peut également mélanger les indices, par exemple $T^{a\mu} = h_{\varphi}^a T^{\varphi\mu}$. Puisque la dérivation absolue d'un tenseur est encore un tenseur, on doit avoir : $DT^{a\mu} = h_{\varphi}^a DT^{\varphi\mu}$.

C'est à dire :

$$\begin{aligned} DT^{a\mu} &= h_{\varphi}^a \left(dT^{\varphi\mu} + \omega_{\cdot \tau}^{\varphi} T^{\tau\mu} + \omega_{\cdot \nu}^{\mu} T^{\varphi\nu} \right) \\ &= dT^{a\mu} + T^{\varphi\mu} \left(-dh_{\varphi}^a + \omega_{\cdot \varphi}^{\psi} h_{\psi}^a \right) + \omega_{\cdot \nu}^{\mu} T^{a\nu} \end{aligned}$$

Et en utilisant l'équation (9) :

$$DT^{a\mu} = dT^{a\mu} + \omega_{\cdot b}^a T^{b\mu} + \omega_{\cdot \nu}^{\mu} T^{a\nu} \quad (14)$$

qui montre la cohérence de la formulation. Ce résultat se généralise à tout tenseur comportant n'importe quel mélange d'indices.

Exemple particulier : $(Dh_a)^b = (dh_a)^b + \omega^b_{.c} h_a^c$, or $h_a^b = \delta_a^b$, donc : $\overrightarrow{Dh_a} = \omega^b_{.a} \overrightarrow{h_b}$, conformément à (9b).

5. Courbe auto parallèle.

Une courbe $\gamma(t)$ passant par un point M et tangente à un vecteur $\overrightarrow{t_M}$ en ce point, est une courbe auto parallèle si le vecteur tangent à celle-ci en un point quelconque se déduit de $\overrightarrow{t_M}$ par transport parallèle le long de la courbe elle-même.

Le vecteur tangent à pour composantes $t^\alpha = \frac{dx^\alpha}{dt}$ et donc en exprimant que la différentielle absolue le long de γ est nulle on a :

$$Dt^\alpha = dt^\alpha + \omega^{\alpha}_{.\beta\gamma} t^\beta dx^\gamma = 0 \Rightarrow \frac{d^2x^\alpha}{dt^2} + \omega^{\alpha}_{.\beta\gamma} \frac{dx^\beta}{dt} \frac{dx^\gamma}{dt} = 0 \quad (15)$$

Considérons maintenant le transport parallèle le long d'une géodésique. En géométrie euclidienne le transport parallèle d'un vecteur le long d'une droite conserve l'angle que fait celui-ci avec cette dernière. En fait cela est une conséquence de deux propriétés : d'une part cela suppose qu'un vecteur tangent à une droite (considérée comme une courbe) reste tangent à cette droite dans le transport parallèle le long de celle-ci, et d'autre part que les produits scalaires sont conservés dans ce transport. La deuxième propriété a été postulée précédemment.

Dans la suite de ces notes nous utiliserons indifféremment les notations suivantes pour les coefficients de la connexion :

$$\Gamma^b_{.a\gamma} = \omega^b_{.a\gamma}, \quad \Gamma^\alpha_{.\beta\gamma} = \omega^\alpha_{.\beta\gamma} \quad (16)$$

La similitude entre l'équation des auto parallèles et celle des géodésiques nous incite à poser :

$$\Gamma^\alpha_{.\beta\gamma} = \{\alpha_{\beta\gamma}\} + \Omega^\alpha_{.\beta\gamma} \quad (17)$$

où $\Omega^\alpha_{.\beta\gamma}$ est la contorsion. On pose : $\Omega_{\delta\beta\gamma} = g_{\alpha\delta} \Omega^\alpha_{.\beta\gamma}$, $\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = g_{\alpha\delta} \Gamma^\delta_{.\beta\gamma}$

En utilisant les équations (17), (13b) et (8.8b) on a :

$$\Omega_{\alpha\beta\gamma} + \Omega_{\beta\alpha\gamma} = 0 \quad (18a)$$

$$\text{et :} \quad \Gamma_{\alpha\beta\gamma} + \Gamma_{\beta\alpha\gamma} = \partial_\gamma g_{\alpha\beta} \quad (18b)$$

En utilisant les équations (8.13) et (8) on montre immédiatement que la contorsion est un tenseur. On définit la torsion par :

$$S^\alpha_{.\beta\gamma} = \frac{1}{2} \left(\Gamma^\alpha_{.\beta\gamma} - \Gamma^\alpha_{.\gamma\beta} \right) = \frac{1}{2} \left(\Omega^\alpha_{.\beta\gamma} - \Omega^\alpha_{.\gamma\beta} \right) \quad (19)$$

La torsion est évidemment un tenseur, et par construction :

$$S^\alpha_{.\beta\gamma} = -S^\alpha_{.\gamma\beta} \quad (20)$$

En utilisant les propriétés de symétrie du tenseur de torsion et de la contorsion, on obtient :

$$\Omega^\alpha_{.\beta\gamma} = S^\alpha_{.\beta\gamma} - S^\alpha_{.\beta.\gamma} - S^\alpha_{.\gamma.\beta} \quad ; \quad S^\alpha_{.\beta.\gamma} = g^{\alpha\delta} S_{\beta\delta\gamma} \quad (21)$$

Pour cela on sépare la contorsion en une partie symétrique et une partie antisymétrique :

$$\Omega_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2} \left(\Omega_{\alpha\beta\gamma} + \Omega_{\alpha\gamma\beta} \right) + \frac{1}{2} \left(\Omega_{\alpha\beta\gamma} - \Omega_{\alpha\gamma\beta} \right) = s_{\alpha\beta\gamma} + S_{\alpha\beta\gamma}$$

où $s_{\alpha\gamma\beta}$ correspond au premier terme du membre de droite et est symétrique par échange de β et γ . Avec (18a) on a : $\Omega_{\alpha\beta\gamma} = -\Omega_{\beta\alpha\gamma} = -s_{\beta\alpha\gamma} - S_{\beta\alpha\gamma}$

et en ajoutant à la ligne précédente : $2\Omega_{\alpha\beta\gamma} = S_{\alpha\beta\gamma} - S_{\beta\alpha\gamma} + s_{\alpha\beta\gamma} - s_{\beta\alpha\gamma}$

$$\text{or : } \quad s_{\alpha\beta\gamma} - s_{\beta\alpha\gamma} = s_{\alpha\gamma\beta} - s_{\beta\gamma\alpha} = \frac{1}{2} \left(\Omega_{\alpha\gamma\beta} + \Omega_{\alpha\beta\gamma} \right) - \frac{1}{2} \left(\Omega_{\beta\gamma\alpha} + \Omega_{\beta\alpha\gamma} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(-\Omega_{\gamma\alpha\beta} + \Omega_{\gamma\beta\alpha} \right) + \Omega_{\alpha\beta\gamma} = S_{\gamma\beta\alpha} + \Omega_{\alpha\beta\gamma}$$

d'où l'on obtient la relation (21).

Bien sûr, si la torsion est nulle les portions de courbes auto parallèles sont des segments de géodésiques, de plus la contorsion est également nulle.

6. Le parallélogramme infinitésimal.

Reprenons la figure construite au chapitre précédent à l'aide de segments de géodésiques, et supposons que les vecteurs $\vec{\xi}(x_1)$ et $\vec{\eta}(x_2)$ soient déduits respectivement des vecteurs $\vec{\xi}(x_0)$ et $\vec{\eta}(x_0)$ par transport parallèle le long des courbes auto parallèles x_0x_1 et x_0x_2 .

On a alors :

$$\partial_\beta \xi^\alpha = -\Gamma_{\cdot\beta\gamma}^\alpha \xi^\gamma$$

Et de même pour le champ $\vec{\eta}$. On obtient donc :

$$x_4^\alpha - x_3^\alpha = st \left[\Gamma_{\cdot\beta\gamma}^\alpha - \Gamma_{\cdot\gamma\beta}^\alpha \right] \xi_0^\beta \eta_0^\gamma = 2st S_{\cdot\beta\gamma}^\alpha \xi_0^\beta \eta_0^\gamma \quad (22)$$

Par conséquent, en l'absence de torsion le parallélogramme infinitésimal se referme (à des termes d'ordre 3 ou supérieur près). En présence de torsion le parallélogramme apparaît comme tordu, d'où le nom de torsion.

7. La dérivation absolue ne commute pas.

Considérons un champ de vecteur $V^\alpha(x)$, on a, si ces fonctions sont au moins deux fois différentiables, $\partial_\beta \partial_\gamma V^\alpha = \partial_\gamma \partial_\beta V^\alpha$. Qu'en est il pour la différentiation absolue ?

En utilisant les règles de différentiation absolue des tenseurs exposées à la section 4, on a, puisque $D_\gamma V^\alpha$ est un tenseur :

$$\left[D_\gamma, D_\delta \right] V^\alpha = D_\gamma D_\delta V^\alpha - D_\delta D_\gamma V^\alpha$$

$$= \left(\partial_\gamma D_\delta V^\alpha + \Gamma_{\cdot\varphi\gamma}^\alpha D_\delta V^\varphi - \Gamma_{\cdot\delta\gamma}^\varphi D_\varphi V^\alpha \right) - \left(\partial_\delta D_\gamma V^\alpha + \Gamma_{\cdot\varphi\delta}^\alpha D_\gamma V^\varphi - \Gamma_{\cdot\gamma\delta}^\varphi D_\varphi V^\alpha \right)$$

Ce qui s'écrit :

$$\left[D_\gamma, D_\delta \right] V^\alpha = R_{\cdot\beta\gamma\delta}^\alpha V^\beta + 2S_{\cdot\gamma\delta}^\varphi D_\varphi V^\alpha \quad (23)$$

où :

$$R_{\cdot\beta\gamma\delta}^\alpha = \partial_\gamma \Gamma_{\cdot\beta\delta}^\alpha - \partial_\delta \Gamma_{\cdot\beta\gamma}^\alpha + \Gamma_{\cdot\varphi\gamma}^\alpha \Gamma_{\cdot\beta\delta}^\varphi - \Gamma_{\cdot\varphi\delta}^\alpha \Gamma_{\cdot\beta\gamma}^\varphi$$

Dans l'équation (23) les dérivées absolues et la torsion sont des tenseurs, donc $R_{\cdot\beta\gamma\delta}^\alpha$ est un tenseur. C'est le tenseur de courbure.

Ce résultat se généralise à n'importe quel tenseur. On obtient en répétant le calcul précédent :

$$\left[D_\gamma, D_\delta \right] T^{\alpha_1 \dots \alpha_p} = R_{\cdot\beta_i\gamma\delta}^{\alpha_i} T^{\alpha_1 \dots \beta_i \dots \alpha_p} + 2S_{\cdot\gamma\delta}^\varphi D_\varphi T^{\alpha_1 \dots \alpha_p} \quad (24)$$

Une façon d'étudier la non commutativité est de considérer un quadrilatère fermé infinitésimal. C'est ce que nous allons faire maintenant

8. La courbure.

Nous allons étudier le transport d'un vecteur par parallélisme sur un circuit fermé infinitésimal. Soit un quadrilatère ABCD dont les cotés sont des segments d'auto parallèles, ou de géodésiques si la torsion est nulle. Soient $\{x^\alpha\}$ les coordonnées du point A, $\{x^\alpha + dx^\alpha\}$ celles de B, $\{x^\alpha + dy^\alpha\}$ celles de D, et enfin $\{x^\alpha + dx^\alpha + dy^\alpha\}$ celles du point C.

Le transport d'un vecteur \vec{V} par parallélisme le long d'une courbe donnée est défini par :

$$DV^\alpha = dV^\alpha + \Gamma^\alpha_{\cdot\beta\gamma} V^\beta dx^\gamma$$

Considérons une courbe auto parallèle paramétrée par la longueur s de l'arc à partir d'un point P donné sur cette courbe. Dans la suite nous aurons besoin de calculer l'évolution des composantes de \vec{V} à l'ordre 2 en s . Il faut résoudre l'équation :

$$\frac{dV^\alpha}{ds} + \Gamma^\alpha_{\cdot\beta\gamma} V^\beta \frac{dx^\gamma}{ds} = 0$$

Pour de petites longueurs d'arc, l'équation (9.15) implique :

$$x^\alpha - x_P^\alpha = k_P^\alpha s - \Gamma^\alpha_{\cdot\beta\gamma}(P) k_P^\beta k_P^\gamma \frac{s^2}{2} + O(s^3)$$

où k_P^α est un vecteur de module unité donnant la direction de la courbe au point P dans le repère naturel en ce point. Les coefficients k_P^α et s sont déterminés par la connaissance du point d'arrivée.

Nous écrivons le vecteur \vec{V} transporté par parallélisme le long de l'arc ci-dessus sous la forme :

$$V^\alpha = V_P^\alpha - \Gamma^\alpha_{\cdot\beta\gamma} V_P^\beta (x^\gamma - x_P^\gamma) + A^\alpha_{\cdot\beta\gamma\delta} V_P^\beta (x^\gamma - x_P^\gamma) (x^\delta - x_P^\delta) + \dots$$

où : $\Gamma^\alpha_{\cdot\beta\gamma} = \Gamma^\alpha_{\cdot\beta\gamma}(P)$.

L'équation du transport parallèle \vec{V} devient :

$$\begin{aligned} -\frac{dV^\alpha}{ds} &= -\partial_\gamma V^\alpha \frac{dx^\gamma}{ds} = \left(\Gamma^\alpha_{\cdot\beta\gamma} V_P^\beta - 2A^\alpha_{\cdot\beta\varphi\gamma} V_P^\beta k_P^\varphi s + \dots \right) \left(k_P^\gamma - \Gamma^\gamma_{\cdot\chi\psi} k_P^\chi k_P^\psi s + \dots \right) \\ &= \Gamma^\alpha_{\cdot\beta\gamma} V_P^\beta \frac{dx^\gamma}{ds} = \left(\Gamma^\alpha_{\cdot\beta\gamma} + \partial_\delta \Gamma^\alpha_{\cdot\beta\gamma} k_P^\delta s + \dots \right) \left(V_P^\beta - \Gamma^\beta_{\cdot\epsilon\varphi} V_P^\epsilon k_P^\varphi s + \dots \right) \left(k_P^\gamma - \Gamma^\gamma_{\cdot\mu\nu} k_P^\mu k_P^\nu s + \dots \right) \end{aligned}$$

On obtient au second ordre :

$$V^\alpha = V_P^\alpha - \Gamma^\alpha_{\cdot\beta\gamma} V_P^\beta (x^\gamma - x_P^\gamma) - \frac{1}{2} \left(\partial_\delta \Gamma^\alpha_{\cdot\beta\gamma} - \Gamma^\alpha_{\cdot\epsilon\gamma} \Gamma^\epsilon_{\cdot\beta\delta} \right) V_P^\beta (x^\gamma - x_P^\gamma) (x^\delta - x_P^\delta) + \dots$$

où les coefficients de la connexion et leurs dérivées sont pris en P.

Revenons au quadrilatère ABCD. On écrit les composantes du transporté parallèle du vecteur \vec{V}_A , du point A au point B, sous la forme abrégée :

$$V_B^\alpha = V_A^\alpha - \Gamma^\alpha_{\cdot\beta\gamma}(A) V_A^\beta dx^\gamma + A^\alpha_{\cdot\beta\varphi\tau} V_A^\beta dx^\varphi dx^\tau + \dots$$

Le transporté parallèle de \vec{V}_B en C sera :

$$V_1^\alpha = V_B^\alpha - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(B) V_B^\beta dy^\gamma + A_{\beta\varphi\tau}^\alpha(B) V_B^\beta dy^\varphi dy^\tau + \dots$$

soit en restant au second ordre :

$$V_1^\alpha = V_A^\alpha - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(A) V_A^\beta dx^\gamma + A_{\beta\varphi\tau}^\alpha V_A^\beta dx^\varphi dx^\tau - \left(\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(A) + \partial_\delta \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha dx^\delta \right) \left(V_A^\beta - \Gamma_{\varphi\delta}^\beta(A) V_A^\varphi dx^\delta \right) dy^\gamma + A_{\beta\varphi\tau}^\alpha V_A^\beta dy^\varphi dy^\tau + \dots$$

donc :

$$V_1^\alpha = V_A^\alpha - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha V_A^\beta dx^\gamma - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha V_A^\beta dy^\gamma - \partial_\delta \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha V_A^\beta dx^\delta dy^\gamma + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \Gamma_{\varphi\tau}^\beta V_A^\varphi dx^\tau dy^\gamma + A_{\beta\varphi\tau}^\alpha V_A^\beta dx^\varphi dx^\tau + A_{\beta\varphi\tau}^\alpha V_A^\beta dy^\varphi dy^\tau + \dots$$

où les coefficients de la connexion et leurs dérivées sont pris en A.

Pour calculer le transporté parallèle \vec{V}_2 de \vec{V}_A en C le long de AD puis DC, il suffit d'échanger dx et dy dans la formule précédente. La différence entre les deux vecteurs est donc, au second ordre inclus :

$$\delta V^\alpha = V_2^\alpha - V_1^\alpha = - \left(\partial_\gamma \Gamma_{\beta\delta}^\alpha - \partial_\delta \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha + \Gamma_{\varphi\gamma}^\alpha \Gamma_{\beta\delta}^\varphi - \Gamma_{\varphi\delta}^\alpha \Gamma_{\beta\gamma}^\varphi \right) V_A^\beta dx^\delta dy^\gamma$$

où les termes suivants sont d'ordre 3 ou plus.

Le transport parallèle d'un vecteur le long d'un arc est réversible, c'est à dire si on refait le trajet en sens inverse on doit retrouver le vecteur initial. Vérifions que cela est vrai à l'ordre des calculs effectués avec un cas simple. On considère le transport parallèle du vecteur V_A^α du point A jusqu'au point B, puis l'opération inverse. Le transporté parallèle de V_B^α en A est (attention dx^α change de signe):

$$V_A'^\alpha = V_B^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(B) V_B^\beta dx^\gamma + A_{\beta\varphi\tau}^\alpha(B) V_B^\beta dx^\varphi dx^\tau + \dots$$

en restant à l'ordre 2 inclus on a en remplaçant :

$$V_A'^\alpha = V_A^\alpha - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha V_A^\beta dx^\gamma + A_{\beta\varphi\tau}^\alpha V_A^\beta dx^\varphi dx^\tau + \left(\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha + \partial_\delta \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha dx^\delta \right) \left(V_A^\beta - \Gamma_{\varphi\delta}^\beta V_A^\varphi dx^\delta \right) dx^\gamma + A_{\beta\varphi\tau}^\alpha V_A^\beta dx^\varphi dx^\tau + \dots$$

où les coefficients de la connexion et leurs dérivées sont pris en A. Compte tenu de l'expression de $A_{\beta\varphi\tau}^\alpha$, on obtient : $V_A'^\alpha = V_A^\alpha$ au second ordre inclus.

Donc le calcul de $\delta V^\alpha = V_2^\alpha - V_1^\alpha$ est équivalent à parcourir le circuit CBADC.

Revenons à δV^α , la quantité entre parenthèse est le tenseur de courbure (23) :

$$R_{\beta\gamma\delta}^\alpha = \partial_\gamma \Gamma_{\beta\delta}^\alpha - \partial_\delta \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha + \Gamma_{\varphi\gamma}^\alpha \Gamma_{\beta\delta}^\varphi - \Gamma_{\varphi\delta}^\alpha \Gamma_{\beta\gamma}^\varphi \quad (25a)$$

$$\delta V^\alpha = R_{\beta\gamma\delta}^\alpha V_A^\beta dx^\delta dy^\gamma \quad (25b)$$

C'est un tenseur puisque δV^α est un vecteur (étant la différence de deux vecteurs) et que toutes les autres quantités de cette formule sont des vecteurs.

Le tenseur de courbure est antisymétrique dans les deux derniers indices, comme on le constate directement :

$$R_{\beta\gamma\delta}^\alpha = - R_{\beta\delta\gamma}^\alpha \quad (26)$$

Nous pouvons donc écrire la relation (25b) sous la forme :

$$\delta V^\alpha = \frac{1}{2} R_{\beta\gamma\delta}^\alpha V_A^\beta (dx^\delta dy^\gamma - dy^\delta dx^\gamma)$$

et faire apparaître la quantité $R_{\beta\gamma\delta}^\alpha dx^\delta \wedge dy^\gamma$.

Puisque c'est un tenseur on peut monter et descendre les indices à l'aide du tenseur métrique.

Par exemple :

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{\alpha\tau} R^{\tau}_{\beta\gamma\delta}$$

Il est également antisymétrique dans les deux premiers indices, sous certaines conditions, comme nous allons le montrer. D'après la définition (25a) on a :

$$R_{\mu\rho\gamma\delta} + R_{\rho\mu\gamma\delta} = g_{\mu\nu} \left(\partial_{\gamma}\Gamma^{\nu}_{\cdot\rho\delta} - \partial_{\delta}\Gamma^{\nu}_{\cdot\rho\gamma} + \Gamma^{\nu}_{\cdot\varphi\gamma} \Gamma^{\varphi}_{\cdot\rho\delta} - \Gamma^{\nu}_{\cdot\varphi\delta} \Gamma^{\varphi}_{\cdot\rho\gamma} \right) \\ + g_{\rho\nu} \left(\partial_{\gamma}\Gamma^{\nu}_{\cdot\mu\delta} - \partial_{\delta}\Gamma^{\nu}_{\cdot\mu\gamma} + \Gamma^{\nu}_{\cdot\varphi\gamma} \Gamma^{\varphi}_{\cdot\mu\delta} - \Gamma^{\nu}_{\cdot\varphi\delta} \Gamma^{\varphi}_{\cdot\mu\gamma} \right)$$

Considérons les deux premiers termes du membre de droite, compte tenu de (13b) ils s'écrivent :

$$g_{\mu\nu} \left(\partial_{\gamma}\Gamma^{\nu}_{\cdot\rho\delta} - \partial_{\delta}\Gamma^{\nu}_{\cdot\rho\gamma} \right) = \partial_{\gamma} \left(g_{\mu\nu} \Gamma^{\nu}_{\cdot\rho\delta} \right) - \partial_{\delta} \left(g_{\mu\nu} \Gamma^{\nu}_{\cdot\rho\gamma} \right) + \Gamma^{\nu}_{\cdot\rho\gamma} \left(\Gamma_{\mu\nu\delta} + \Gamma_{\nu\mu\delta} \right) - \Gamma^{\nu}_{\cdot\rho\delta} \left(\Gamma_{\mu\nu\gamma} + \Gamma_{\nu\mu\gamma} \right)$$

On fait la même chose pour les deux autres dérivées, et après identification de tous les termes deux à deux, il reste :

$$R_{\mu\rho\gamma\delta} + R_{\rho\mu\gamma\delta} = \partial_{\gamma} \left(\Gamma_{\mu\rho\delta} + \Gamma_{\rho\mu\delta} \right) - \partial_{\delta} \left(\Gamma_{\mu\rho\gamma} + \Gamma_{\rho\mu\gamma} \right) \\ = \partial_{\gamma}\partial_{\delta} g_{\mu\rho} - \partial_{\delta}\partial_{\gamma} g_{\mu\rho}$$

Donc si le tenseur métrique est deux fois différentiable, le tenseur de courbure est antisymétrique dans les deux premiers indices, qu'il y ait torsion ou pas :

$$R_{\mu\rho\gamma\delta} + R_{\rho\mu\gamma\delta} = 0 \quad (27)$$

L'anti-symétrie du tenseur de courbure sur les deux premiers indices montre que la formule (25b) est une rotation infinitésimale (Appendice A). Ceci était attendu puisque le transport parallèle conserve les modules, la transformation conserve donc les modules.

Dans le cas des espaces à deux dimensions le tenseur de courbure n'a qu'une seule composante, par exemple R_{1212} , toutes les autres composantes s'en déduisent par les relations de symétrie.

Il existe d'autres relations de symétrie que nous allons étudier au chapitre suivant.

9. La courbure scalaire, le tenseur de Ricci.

On peut contracter deux indices du tenseur de courbure pour former un tenseur de rang deux, qui s'appelle le tenseur de Ricci :

$$R_{\beta\gamma} = R^{\alpha}_{\beta\alpha\gamma} \quad (28)$$

Le tenseur de Ricci est symétrique s'il n'y a pas de torsion, comme nous le verrons plus tard. Enfin on peut effectuer une contraction de plus pour obtenir un scalaire appelé la courbure scalaire :

$$R = g^{\beta\gamma} R_{\beta\gamma} \quad (29)$$

La courbure scalaire est évidemment invariante par un changement de coordonnées. On peut construire d'autres invariants, par exemple $R^{\beta\gamma} R_{\beta\gamma}$, etc...

Pour une sphère décrite par la métrique $ds^2 = \rho^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\varphi^2)$, le tenseur de courbure est en l'absence de torsion (on pose $x^1 = \theta$, $x^2 = \varphi$, $s = \sin(\theta)$, $c = \cos(\theta)$) : $R_{1212} = \rho^2 s^2$, le tenseur de Ricci est : $R_{11} = 1$, $R_{12} = 0$, $R_{22} = s^2$

et la courbure scalaire est : $R = 2/\rho^2$.

Le facteur 2 qui apparaît dans cette formule peut être éliminer en changeant la définition du tenseur de courbure, c'est à dire en écrivant :

$$R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2} \left(\partial_{\gamma}\Gamma^{\alpha}_{\beta\delta} - \partial_{\delta}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} + \Gamma^{\alpha}_{\cdot\varphi\gamma}\Gamma^{\varphi}_{\cdot\beta\delta} - \Gamma^{\alpha}_{\cdot\varphi\delta}\Gamma^{\varphi}_{\cdot\beta\gamma} \right)$$

Mais nous resterons à la définition (25).

Un autre exemple : le tore à deux dimensions plongé dans \mathbb{R}^3 .

Soit un tore dont le grand rayon est ρ et le petit rayon est r . Soit ξ l'angle compté le long du grand cercle, et φ celui compté le long d'un petit cercle. L'axe Oz des coordonnées cartésiennes de \mathbb{R}^3 est l'axe de symétrie du tore et le plan de symétrie du tore est le plan Oxy . Les points de la surface du tore ont pour coordonnées ($c_{\xi} = \cos(\xi)$, etc) :

$$x = (\rho + rc_{\varphi})c_{\xi}, \quad y = (\rho + rc_{\varphi})s_{\xi}, \quad z = rs_{\varphi}$$

d'où la métrique induite à partir de la métrique euclidienne de \mathbb{R}^3 :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \Rightarrow ds^2 = (\rho + rc_{\varphi})^2 d\xi^2 + r^2 d\varphi^2$$

Le tenseur de courbure est alors : $R^1_{212} = rc_{\varphi} / (\rho + rc_{\varphi})$

et la courbure scalaire : $R = 2c_{\varphi} / (r(\rho + rc_{\varphi}))$

La courbure scalaire est positive si $\varphi = 0$, c'est à dire sur la partie convexe du tore, elle est nulle si $\varphi = \pm \pi/2$, et elle est négative si $\varphi = \pi$, c'est à dire sur la partie la plus proche de l'axe de symétrie du tore. Un petit morceau de cette dernière représente la fameuse selle de cheval que l'on utilise pour illustrer les surfaces de courbure négative.

Exercice 1. Soit un cylindre à deux dimensions plongé dans \mathbb{R}^3 d'axe Oz et décrit par la métrique des coordonnées cylindriques : $ds^2 = dz^2 + \rho^2 d\theta^2$, $\rho = Cte$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Quelle est sa courbure ? pourquoi ?

Exercice 2. Cet exercice permet de visualiser une surface de courbure négative (ou nulle).

On considère dans E^3 muni de coordonnées Cartésiennes orthonormées (O, x, y, z) un cercle de centre O et de rayon R dans la plan Oxy . Soit φ la coordonnées azimuthal d'un point A de ce cercle : $x_A = Rc_{\varphi}$, $c_{\varphi} = \cos(\varphi)$, $y_A = Rs_{\varphi}$, $s_{\varphi} = \sin(\varphi)$.

Le vecteur unitaire : $\vec{v} = (-c_a s_{\varphi}, c_a c_{\varphi}, s_a)$ où : $c_a = \cos(a)$, $s_a = \sin(a)$ est perpendiculaire au rayon OA et fait avec le plan Oxy un angle a .

On considère la surface S ensemble des points :

$$M = A + l\vec{v} = (Rc_{\varphi} - lc_a s_{\varphi}, Rs_{\varphi} + lc_a c_{\varphi}, ls_a)$$

Cette surface à la forme d'une tour de refroidissement de centrale thermique.

Si $a = \pi/2$, \vec{v} est parallèle à l'axe Oz et S est un cylindre. Si $R = 0$ c'est un cône. Déduire l'élément linéaire pour les coordonnées φ, l . La métrique trouvée n'est pas diagonale, pour faciliter les calculs prendre des variables géométriques plus intuitives pour obtenir une métrique diagonale et en déduire le tenseur de courbure.

10. Le cas des espaces à deux dimensions sans torsion.

Dans ce cas le tenseur de courbure n'a qu'une seule composante. Exprimons la courbure scalaire : $R = g^{\beta\delta} R_{\beta\delta} = g^{\beta\delta} g^{\alpha\varphi} R_{\alpha\beta\varphi\delta}$

Soit à 2 dimensions :

$$R = g^{22} g^{11} R_{1212} + g^{21} g^{12} R_{1221} + g^{12} g^{21} R_{2112} + g^{11} g^{22} R_{2121}$$

$$R = 2 (g^{11} g^{22} - g^{12} g^{21}) R_{1212} = 2 R_{1212} / g$$

où, rappelons le, g est le déterminant de la matrice construite avec le tenseur métrique.

Pour connaître l'angle de rotation d'un vecteur après un transport parallèle le long d'un circuit infinitésimal fermé, on reprend l'équation (25). Mais dans cette équation, les paramètres de rotation représenteront un angle que s'ils sont exprimés dans un repère orthonormé (cf chapitre sur les vecteurs).

On choisit donc une base orthonormée $\{h_a^\alpha\}$ de l'espace tangent, et on pose $\vec{h}_a = h_a^\alpha \vec{e}_\alpha$ comme au début du chapitre 8. On choisit pour circuit infinitésimal un quadrilatère tel qu'un côté soit porté par \vec{e}_1 et soit de longueur dx et l'autre soit porté par \vec{e}_2 et de longueur dy . On écrira la rotation infinitésimale sous la forme : $\delta V^\alpha = a^\alpha_{\cdot\beta} V^\beta$, $a^\alpha_{\cdot\beta} = R^\alpha_{\cdot\beta\gamma\delta} dx^\delta dy^\gamma$ ou

encore en changeant de base :

$$\delta V^\alpha = h_a^\alpha \delta V^a = a^\alpha_{\cdot b} h_b^\beta V^b \Rightarrow \delta V^a = a^a_{\cdot b} V^b, \quad a^a_{\cdot b} = h_a^\alpha h_b^\beta a^\alpha_{\cdot\beta}$$

Les coefficients de la rotation dans la base orthonormée sont :

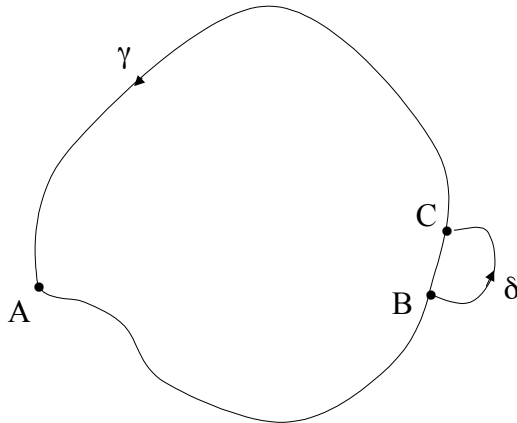
$$a_{ab} = h_a^\alpha h_b^\beta a_{\alpha\beta} = a_{12} h_a^1 h_b^2 + a_{21} h_a^2 h_b^1 = a_{12} (h_a^1 h_b^2 - h_a^2 h_b^1) = a_{12} \det(h_a^\alpha)$$

Mais on a : $\det(h_a^\alpha \eta_{ab} h_b^\beta) = \det(g_{\alpha\beta})$, donc :

$$\det(h^T) \det(\eta) \det(h) = g \Rightarrow \det(h_a^\alpha) = \sqrt{g/\eta} \quad (30)$$

Finalement le paramètre de rotation est : $a_{a=1, b=2} = R \sqrt{g} dx dy / 2 = \frac{1}{2} R dS$ (31)

Soit un circuit fermé γ et soit une petite déviation δ de ce circuit.



Le transport parallèle d'un vecteur \vec{V} le long de γ induit une rotation de ce vecteur selon la formule (25). Si maintenant le transport se fait le long du chemin modifié, la rotation subie par \vec{V} sera modifiée par la rotation induite par le circuit élémentaire fermé δ car, à deux dimensions, les angles de rotation s'ajoutent.

Par conséquent l'angle de rotation de \vec{V} au point A après un tour complet est :

$$\Delta\alpha = \frac{1}{2} \int R dS \quad (32)$$

11. Les triangles géodésiques de la sphère S^2 .

On considère la sphère S^2 et on suppose la torsion nulle. Un triangle géodésique est un triangle dont chaque coté est un segment de géodésique. Un vecteur transporté parallèlement à lui même subira une rotation dont l'angle sera : $\Delta\alpha = S/\rho^2$, où ρ est le rayon de la sphère. S'il n'y a pas de torsion, puisque le transport parallèle d'un vecteur le long d'une géodésique conserve l'angle de ce vecteur avec cette dernière, $\Delta\alpha$ représente la somme des angles du triangle géodésique. Par conséquent la surface d'un triangle géodésique de la sphère S^2 de rayon ρ , dont les angles au sommet sont α, β, γ , est :

$$S = \rho^2 (\alpha + \beta + \gamma - \pi) \quad (33)$$

Démonstration classique pour la sphère.

Dans le cas de la sphère à deux dimensions, qui est une surface à courbure positive constante, on peut donner une démonstration de géométrie classique de la surface d'un triangle sphérique. La démonstration qui suit est reprise d'un dictionnaire du début du vingtième siècle, une époque, probablement, où l'on n'hésitait pas à écrire quelques formules simples pour expliquer les choses, alors que maintenant certains prétendent expliquer des concepts de physique très abstraits seulement qualitativement.

Soit un triangle sphérique quelconque A, B, C , comme sur la figure suivante :

On appelle A', B', C' les points diamétralement opposés respectivement aux points A, B, C , et on appelle $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ les angles au sommet du triangle géodésique ABC . On a les relations suivantes entre les triangles sphériques :

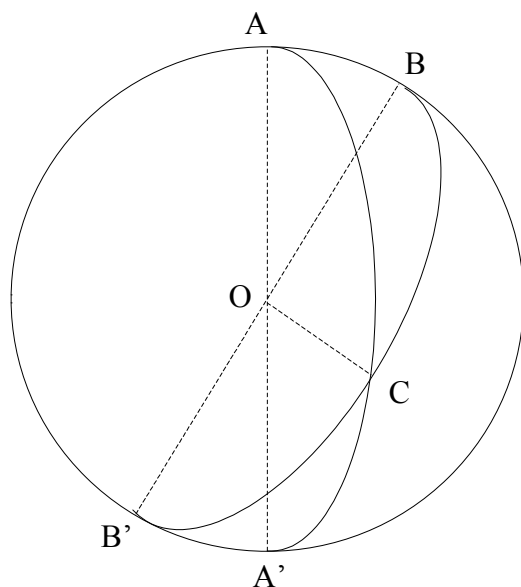
$$ABC + BCA' = \text{fuseau de sommet } A$$

$$BAC + ACB' = \text{fuseau de sommet } B$$

$$CAB + CB'A' = \text{fuseau de sommet } C \quad (\text{en prenant le symétrique de } CB'A')$$

$$\text{or : } \text{somme des fuseaux } A, B, C = \frac{1}{2} \text{ sphere} + 2ABC$$

où la demi sphère est celle de plan équatorial $ABA'B'$.



La surface du fuseau d'angle \widehat{A} étant $2 \widehat{A} R^2$, etc, on obtient finalement :

$$S_{ABC} = R^2 \left(\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} - \pi \right)$$

Exercice 3. Utiliser la formule de la surface d'un triangle sphérique pour retrouver les polyèdres platoniciens.

Les polyèdres platoniciens sont les polyèdres inscrits dans une sphère, c'est à dire dont les sommets sont sur une sphère, et dont toutes les faces sont égales.

Retrouver le même résultat en utilisant la caractéristique d'Euler-Poincaré, dont voici la définition pour une surface à deux dimensions.

Supposons qu'une variété à deux dimensions ait été triangulée, c'est à dire que cette surface ait été « découpée » en triangles (pas nécessairement géodésiques) suffisamment petits, ou plus généralement en polygones. Soit F le nombre de faces (triangles ou polygones), C le nombre d'arêtes (de cotés), et S le nombre de sommets (vertex). La caractéristique d'Euler Poincaré est le nombre :

$$\chi = F - C + S$$

Il existe des définitions rigoureuses de la triangulation, mais ici nous nous contenterons de cette approche intuitive.

Ceci se généralise à n'importe quelle dimension, en considérant une somme alternée.

Il est facile de se convaincre, que χ est invariant si on change le « découpage ». Donnons en une idée dans le cas d'une surface. Si on regroupe deux triangles adjacents en un quadrilatère, F diminue d'une unité et C aussi alors que le nombre de sommets ne change pas.

Inversement si un triangle est divisé en trois triangles plus petits à partir d'un point intérieur, le nombre de faces augmente de deux, le nombre de cotés de trois et le nombre de sommets de un, et donc χ est invariant. On peut poursuivre cette analyse plus méthodiquement.

Pour la sphère vérifiez que $\chi = 2$, puis déduire les polyèdres platoniciens.

12. Le théorème de Gauss-Bonnet.

Le théorème de Gauss-Bonnet relie la courbure d'une surface compacte à deux dimensions à sa caractéristique d'Euler-Poincaré (voir définition dans l'énoncé de l'exercice 2). Dans ce qui suit nous ne considérerons que le cas d'une surface compacte fermée (sans bord) mais le résultat s'étend au cas des surfaces compactes ayant un bord.

On suppose que la surface a été découpée en triangles géodésiques suffisamment petits, numérotés par un indice entier i . On appelle dS_i la surface de ces triangles, $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ les angles au sommet, et R_i la courbure de la surface supposée constante sur l'étendue du triangle numéro i . Comme à l'exercice 2 on appelle S le nombre de sommets, F le nombre de faces et C le nombre d'arêtes. On a :

$$\sum_{\text{faces}} \frac{dS_i}{R_i} = \sum_{\text{faces}} (\alpha_i + \beta_i + \gamma_i - \pi) = 2\pi S - \pi F$$

Mais on a supposé que le découpage était constitué de triangles uniquement, donc :

$$\chi = F - C + S = F - 3F/2 + S = S - F/2$$

et donc pour une variété M compacte sans bord à 2 dimensions :

$$\int_M \frac{dS}{R} = 2\pi\chi \quad (34)$$

Réponse à l'exercice 1.

On peut soit faire le calcul direct, soit utiliser la formule de la courbure du tore quand $\rho \rightarrow \infty$ pour trouver que le tenseur de courbure du cylindre est nul. Pour comprendre pourquoi, il faut revenir à la construction du tenseur de courbure, et considérer le transport parallèle d'un vecteur le long d'un petit circuit fermé à la surface du cylindre. Le cylindre est une bande du plan euclidien enroulée (dont on a collé les bords), et sa métrique est localement celle du plan euclidien (il suffit de poser $dx = \rho d\theta$). Localement le cylindre est équivalent à un morceau de plan.

Réponse à l'exercice 2.

De la métrique de E^3 on déduit l'élément linéaire :

$$ds^2 = (R^2 + l^2 c_a^2) d\varphi^2 + dl^2 + 2Rc_a dl d\varphi$$

qui n'est pas diagonal. Pour obtenir un élément linéaire diagonal on va choisir un système de coordonnées plus « naturel ».

La distance R' du point M à l'axe Oz est :

$$R'^2 = (Rc_\varphi - lc_a s_\varphi)^2 + (Rs_\varphi + lc_a c_\varphi)^2 = R^2 + l^2 c_a^2 = R^2 + z^2 t^2$$

où : $t = c_a/s_a$, et son azimuth est donné par :

$$\cos(\varphi') = \frac{Rc_\varphi - lc_a s_\varphi}{R'}, \quad \sin(\varphi') = \frac{Rs_\varphi + lc_a c_\varphi}{R'}$$

La relation : $R'^2 = R^2 + z^2 t^2$ montre que la génératrice du cylindre est une hyperbole (ou une droite).

Avec les coordonnées φ' et z l'élément linéaire est : $ds^2 = R'^2 d\varphi'^2 + \left(1 + \frac{z^2 t^4}{R'^2}\right) dz^2$.

Du tenseur métrique : $g_{11} = R'^2 + z^2 t^2$, $g_{22} = \left(1 + \frac{z^2 t^4}{R'^2}\right)$

on déduit les symboles de Christoffel non nuls :

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{zt^2}{R'^2} \quad , \quad \Gamma_{11}^2 = -\frac{zt^2 R'^2}{R'^2 + z^2 t^4} \quad , \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{zR'^2 t^4}{R'^2} \frac{1}{R'^2 + z^2 t^4}$$

et l'on obtient : $R'^2_{,212} = -\frac{1}{R'^2} \frac{R'^2 t^2}{R'^2 + z^2 t^4}$

La courbure est négative ou nulle mais pas constante . La surface n'est pas une sphère au sens du chapitre 2 ou du chapitre 20 . Regardons ce point :

Si (x, y, z) sont les coordonnées Cartésiennes d'un point de la surface qui est définie par : $R'^2 = x^2 + y^2 = R^2 + z^2 t^2$ et en posant :

$$x = R' \cos(\varphi') = \bar{x} R \quad , \quad y = R' \sin(\varphi') = \bar{y} R \quad , \quad \bar{z} = z t / R$$

l'équation de la surface devient : $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 - \bar{z}^2 = 1$

Posons : $\bar{x} = ch(\chi) \cos(\varphi)$, $\bar{y} = ch(\chi) \sin(\varphi)$, $\bar{z} = sh(\chi)$

et supposons que la métrique soit pseudo-euclidienne . On obtient :

$$ds^2 = ch^2(\chi) d\varphi^2 - d\chi^2$$

qui n'est pas définie positive (voir l'exercice 1 du chapitre 2) .

Si $t = 0$ la surface est un cylindre et la métrique est euclidienne et donc la courbure est nulle .

Si $R = 0$, $t \neq 0$ la figure est un cône et la courbure est nulle . Si l'on appelle $\rho = z/c_a$ la distance d'un point de la surface au sommet du cône et que l'on définit l'angle $\alpha = \varphi r / \rho$, la métrique prend la forme : $ds^2 = \rho^2 d\alpha^2 + d\rho^2$ qui est la métrique euclidienne en coordonnées polaires de la surface plane représentant le cône développé en une portion de disque .

Revenons au cas général . Avec les symboles de Christoffel ci-dessus , l'équation des géodésiques pour la première coordonnées est :

$$\frac{d^2 \varphi'}{ds^2} + \frac{2zt^2}{R'^2} \frac{d\varphi'}{ds} \frac{dz}{ds} = 0$$

qui a pour solution : $R'^2 \frac{d\varphi'}{ds} = Cte$

L'autre équation se déduit directement du ds^2 . Dans le cas de la sphère , les géodésiques sont des arcs de grand cercles , c'est à dire sont l'intersection d'un plan passant par le centre de la sphère avec celle-ci . Est-ce que les géodésiques de la tour S sont contenues dans un plan ? La réponse est non . Pour le montrer il suffit de prendre un contre-exemple avec le cas du cylindre ($t = 0$) . Le calcul ne sera pas développé ici .

Réponse à l'exercice 3.

On appelle N_F le nombre de faces, N_A le nombre d'arêtes issues de chaque sommet, n le nombre d'arêtes par polygone, et δ l'angle entre deux arêtes à chaque sommet.

Si les faces ne sont pas des triangles on décompose chaque polygone en une somme de $n - 2$ triangles géodésiques en joignant un sommet particulier à tous les autres sommets du polygone par des géodésiques afin de trouver la relation entre sa surface et ses angles au sommet.

La formule des triangles sphériques (pour une sphère de rayon 1) implique que la surface de chaque face est :

$n\delta - (n - 2)\pi = 4\pi/N_F$, mais $\delta = 2\pi/N_A$, d'où l'on a la condition : $2n/N_A > n - 2$, et si l'on exclut le cas $N_A = 2$ alors il faut : $2n/(n - 2) > 3$ et donc : $n < 6$. Les faces du polyèdres sont donc soit des triangles, des carrés ou des pentagones.

On peut considérer chaque cas séparément. Prenons le cas où les faces sont des triangles.

Dans ce cas $n = 3$, et par conséquent, si on appelle N_P le nombre de triangles associés à un sommet donné, on a $\delta = 2\pi/N_P$ et donc la contrainte :

$$n\delta - (n - 2)\pi = 3(2\pi/N_P) - \pi = 4\pi/N_F$$

Les seules solutions sont :

$N_P = 3$, $N_F = 4$ qui correspond à un tétraèdre régulier inscrit dans la sphère

$N_P = 4$, $N_F = 8$ qui correspond à un octaèdre régulier, et :

$N_P = 5$, $N_F = 20$ qui est l'icosaèdre régulier.

On peut faire un calcul similaire pour le cas $n = 4$, et l'on trouve une seule solution qui est le cube, enfin pour $n = 5$ on trouve le dodécaèdre dont les faces sont des pentagones au nombre de 12.

On peut obtenir le même résultat en utilisant la contrainte

$$\chi = F - C + S = N_F - n N_F/2 + n N_F/N_A = 2$$

si $n = 3$ (les faces sont des triangles) alors : $N_F = 4N_A/(6 - N_A)$ et on retrouve les solutions déjà trouvée. Si $n = 4$ (les faces sont des carrés) on obtient le cube comme seule solution, et si $n = 5$ la seule solution est le dodécaèdre.