10. La méthode du repère mobile.

Les notions de base ont été introduites aux sections 8.1, 9.2 et 9.3. En chaque point M d'une variété V^n de dimension n , on définit dans l'espace tangent T_M une base de vecteur $\{\overrightarrow{h_a}\}$ qui ne sont pas nécessairement les vecteurs du repère naturel et que nous appellerons « repère mobile » selon la terminologie de Cartan. Cette base de vecteurs sera souvent choisie orthonormée mais pas toujours. Le voisinage d'un point M est décrit par des formes différentielles de degré 1

$$\omega^a = h^a_\alpha \, dx^\alpha \tag{1}$$

Ce chapitre nécessite les notions de base sur les formes différentielles exposées au chapitre 5.

Exercice 1.
Montrer que la forme $\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \ldots \wedge \omega^n$ représente l'élément de volume $dV = \sqrt{g}\, d^n x$.

Exercice 2.
Soit une famille de repères mobiles $\{\overrightarrow{h_a}\}$ et les formes associées (1) décrivant le voisinage d'un point x : $\omega^a = h^a_\alpha \, dx^\alpha$. Soit une forme de degré p : $\sigma = \omega^{a_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{a_p}$.
Calculer directement $*\sigma$ sans utiliser la propriété (5.9).

Un exemple de lien entre repères mobiles et repères naturels, est donné dans l'annexe située à la fin de ce chapitre.

1. Les premières équations de structure.

La définition (1) s'écrit inversement : $dx^\alpha = h^\alpha_a \, \omega^a$, et donc :

$$d(dx^\alpha) = 0 = h^\alpha_a \, d\omega^a + dh^\alpha_a \wedge \omega^a$$

mais : $$h^\alpha_a \, h^a_\beta = \delta^\alpha_\beta \quad \Rightarrow \quad dh^\alpha_a = -\, h^\beta_a \, h^\alpha_b \, dh^b_\beta$$

donc en utilisant la relation (9.9) on a :

$$h^\alpha_a \, d\omega^a + \left(h^\alpha_b \, \omega^b_{\ .a} - h^\beta_a \, \omega^\alpha_{\ .\beta} \right) \wedge \omega^a = 0$$

ce qui, en multipliant par h^c_α se met sous la forme :

$$d\omega^c + \omega^c_{\ .a} \wedge \omega^a = h^c_\alpha \, h^\beta_b \, \omega^\alpha_{\ .\beta} \wedge \omega^b = h^c_\alpha \, \omega^\alpha_{\ .\beta} \, dx^\beta$$

Soit : $$d\omega^a + \omega^a_{\ .b} \wedge \omega^b = h^a_\alpha \, \Gamma^\alpha_{\ .\beta\gamma} \, dx^\gamma \wedge dx^\beta = h^a_\alpha \, \frac{1}{2} \left(\Gamma^\alpha_{\ .\beta\gamma} - \Gamma^\alpha_{\ .\gamma\beta} \right) dx^\gamma \wedge dx^\beta$$

Et finalement :

$$d\omega^a + \omega^a_{\ .b} \wedge \omega^b = -\, h^a_\alpha \, S^\alpha_{\ .\gamma\beta} \, dx^\gamma \wedge dx^\beta \tag{2a}$$

qui forme les premières équations de structure. Ces équations sont équivalentes à la condition $d^2 x^\alpha = 0$, car on peut remonter le calcul à l'envers.
En remplaçant les dx^β par $h^\beta_a \, \omega^a$, et en posant $h^b_\gamma \, h^c_\beta \, \Sigma^a_{\ .bc} = -\, h^a_\alpha \, S^\alpha_{\ .\gamma\beta}$ on re écrit ces équations sous la forme :

$$d\omega^a + \omega^a_{\ .b} \wedge \omega^b = \Sigma^a_{\ .bc} \, \omega^b \wedge \omega^c \tag{2b}$$

Exemple : reprenons la métrique de l'exercice 8.3 et écrivons un système d'équations de structure correspondant. D'abord il faut définir une famille de repères mobiles. Nous la choisirons orthonormée au sens de la signature de (8.19) : $\eta_{ab} = (1, -1, -1, -1)$.

On pose : $s = sin(\theta)$, $A = \left(a + d^2 s^2 / r^2\right)^{\frac{1}{2}}$ et on choisit :

$$\begin{array}{cc} h^a_\alpha = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 \\ d\,s/r & 0 & 0 & r\,s \end{bmatrix} & \downarrow a \\ \alpha \longrightarrow & \end{array} \qquad \longleftrightarrow \qquad \begin{array}{c} \omega^0 = A\,dt \\ \omega^1 = \sqrt{b}\,dr \\ \omega^2 = r\,d\theta \\ \omega^3 = s\,\left(r\,d\varphi + \frac{d}{r}\,dt\right) \end{array}$$

$$h^\alpha_a = \begin{bmatrix} 1/A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r & 0 \\ -d/(Ar^2) & 0 & 0 & 1/(r\,s) \end{bmatrix}$$

Ensuite on utilise la formule (9.9) pour obtenir en l'absence de torsion :

$$\omega_{01} = \frac{1}{2A\sqrt{b}}\left(a_r + \frac{d\,d_r\,s^2}{r^2}\right)dt + \frac{s^2}{A\sqrt{b}}\left(\frac{d}{r} - \frac{d_r}{2}\right)d\varphi$$

$$\omega_{02} = \frac{1}{2Ar}\left(a_\theta + 2\,\frac{d^2\,sc}{r^2}\right)dt \quad , \quad \omega_{03} = \frac{s}{Ar}\left(\frac{d}{r} - \frac{d_r}{2}\right)dr$$

$$\omega_{12} = \frac{d\theta}{\sqrt{b}} \quad , \quad \omega_{13} = \frac{s}{\sqrt{b}}\left(\frac{d_r}{2r}\,dt + d\varphi\right) \quad , \quad \omega_{23} = \frac{c}{r^2}\left(d\,dt + r^2 d\varphi\right)$$

2. Les secondes équations de structure.

Reprenons l'équation (9.9) : $\omega^a_{\ .b} = h^\beta_b\,(h^a_\alpha\,\omega^\alpha_{\ .\beta} - dh^a_\beta)$

et différencions :

$$d\omega^a_{\ .b} = h^\beta_b\,h^a_\alpha\,d\omega^\alpha_{\ .\beta} + dh^\beta_b\,h^a_\alpha \wedge \omega^\alpha_{\ .\beta} + h^\beta_b\,dh^a_\alpha \wedge \omega^\alpha_{\ .\beta} - dh^\beta_b \wedge dh^a_\beta$$

à nouveau de (9.9) : $dh^a_\alpha = h^a_\gamma\,\omega^\gamma_{\ .\alpha} - h^c_\alpha\,\omega^a_{\ .c}$

et : $h^\beta_b\,h^b_\gamma = \delta^\beta_\gamma \;\Rightarrow\; dh^\beta_b = -h^\gamma_b\,h^\beta_c\,dh^c_\gamma = -h^\gamma_b\,\omega^\beta_{\ .\gamma} + h^\beta_c\,\omega^c_{\ .b}$

d' où l'on obtient :

$$d\omega^a_{\ .b} + \omega^a_{\ .c} \wedge \omega^c_{\ .b} = h^\beta_b\,h^a_\alpha\left(d\omega^\alpha_{\ .\beta} + \omega^\alpha_{\ .\gamma} \wedge \omega^\gamma_{\ .\beta}\right) \tag{3a}$$

mais le membre de droite n'est autre que : $\dfrac{1}{2}\, h^{\beta}_{b}\, h^{a}_{\alpha}\, R^{\alpha}_{.\beta\gamma\delta}\, dx^{\gamma}\wedge dx^{\delta}$. Etant donné que $R^{\alpha}_{.\beta\gamma\delta}$ est un tenseur, nous poserons donc :

$$R^{a}_{.b\gamma\delta} = h^{\beta}_{b}\, h^{a}_{\alpha}\, R^{\alpha}_{.\beta\gamma\delta} \qquad , \qquad \Omega^{a}_{.b} = \frac{1}{2}\, R^{a}_{.b\gamma\delta}\, dx^{\gamma}\wedge dx^{\delta} \tag{3b}$$

Les secondes équations de structure s'écrivent alors :

$$d\omega^{a}_{.b} + \omega^{a}_{.c}\wedge\omega^{c}_{.b} \;=\; \Omega^{a}_{.b} \tag{3c}$$

On écrira aussi : $\quad R^{a}_{.bcd} = h^{\gamma}_{c}\, h^{\delta}_{d}\, R^{a}_{.b\gamma\delta} \quad , \quad \Omega^{a}_{.b} = \dfrac{1}{2}\, R^{a}_{.bcd}\, \omega^{c}\wedge\omega^{d} \qquad (3d)$

Dans la suite nous poserons : $\Omega_{ab} = \eta_{ac}\,\Omega^{c}_{.b}$, et d'après (9.27) : $\Omega_{ab} = -\,\Omega_{ba}$.

3. Les identités de Bianchi de première espèce

Différencions l'équation (2b) :

$$d\omega^{a}_{.b}\wedge\omega^{b} \,-\, \omega^{a}_{.b}\wedge d\omega^{b} \,=\, d\Sigma^{a}_{.bc}\,\omega^{b}\wedge\omega^{c} \,+\, \Sigma^{a}_{.bc}\, d\omega^{b}\wedge\omega^{c} \,-\, \Sigma^{a}_{.bc}\,\omega^{b}\wedge d\omega^{c}$$

et en utilisant (2b) et (3c) :

$$\Omega^{a}_{.b}\wedge\omega^{b} \;=\; D\Sigma^{a}_{.bc}\wedge\omega^{b}\wedge\omega^{c} \;+\; 2\,\Sigma^{a}_{.ed}\,\Sigma^{e}_{.bc}\,\omega^{b}\wedge\omega^{c}\wedge\omega^{d} \tag{4}$$

où : $\quad D\Sigma^{a}_{.bc} \;=\; d\Sigma^{a}_{.bc} \,-\, \Sigma^{a}_{.ec}\,\omega^{e}_{.b} \,-\, \Sigma^{a}_{.be}\,\omega^{e}_{.c} \,+\, \Sigma^{e}_{.bc}\,\omega^{a}_{.e}$

Si la torsion est nulle alors :

$$\Omega^{a}_{.b}\wedge\omega^{b} \;=\; 0 \tag{5a}$$

Ce sont les identités de Bianchi de première espèce, que s'écrivent également en explicitant :

$$R^{a}_{.bcd} \,+\, R^{a}_{.dbc} \,+\, R^{a}_{.cdb} \;=\; 0 \tag{5b}$$

On peut évidemment revenir aux repères naturels :

$$R^{\alpha}_{.\beta\gamma\delta} \,+\, R^{\alpha}_{.\delta\beta\gamma} \,+\, R^{\alpha}_{.\gamma\delta\beta} \;=\; 0 \quad , \quad S^{\alpha}_{.\beta\gamma} = 0 \tag{5c}$$

qui est vrai, rappelons le, en l'absence de torsion. Si la torsion n'est pas nulle il faut revenir à l'équation (4).

Conséquence : En l'absence de torsion le tenseur de Ricci est symétrique.
En effet appliquons l'équation (5c) au cas $\alpha = \gamma$ et sommons. En utilisant les propriétés de symétrie du tenseur de courbure on a :

$$R^{\alpha}_{.\beta\alpha\delta} \,+\, R^{\alpha}_{.\delta\beta\alpha} \,+\, R^{\alpha}_{.\alpha\delta\beta} \;=\; R^{\alpha}_{.\beta\alpha\delta} \,-\, R^{\alpha}_{.\delta\alpha\beta} \,+\, 0 \;=\; 0$$

Soit : $\qquad R_{\beta\gamma} = R_{\gamma\beta} \quad , \quad (S^{\alpha}_{.\beta\gamma} = 0) \qquad (6)$

En utilisant plusieurs fois l'identité (5c) on peut obtenir une autre relation de symétrie pour le tenseur de courbure dans le cas où la torsion est nulle. Ecrivons (5c) sous la forme :

$$-\,R_{\alpha\beta\gamma\delta} \;=\; R_{\alpha\delta\beta\gamma} \,+\, R_{\alpha\gamma\delta\beta}$$

et utilisons l'anti-symétrie du tenseur de courbure sur les 2 premiers indices et encore (5c) :

$$-\,R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\, R_{\delta\alpha\beta\gamma} \,-\, R_{\gamma\alpha\delta\beta} \;=\; R_{\delta\gamma\alpha\beta} \,+\, R_{\delta\beta\gamma\alpha} \,+\, R_{\gamma\delta\beta\alpha} \,+\, R_{\gamma\beta\alpha\delta}$$

utilisons les relations de symétrie puis (5c) , on a successivement :

$$-\,R_{\alpha\beta\gamma\delta} \;=\; 2\,R_{\gamma\delta\beta\alpha} \,-\, R_{\beta\delta\gamma\alpha} \,-\, R_{\beta\gamma\alpha\delta} \;=\; 2\,R_{\gamma\delta\beta\alpha} \,+\, R_{\beta\alpha\delta\gamma}$$

et finalement : $\qquad R_{\alpha\beta\gamma\delta} \;=\; R_{\gamma\delta\alpha\beta} \qquad , \qquad (S^{\alpha}_{.\beta\gamma} = 0) \qquad (7)$

Lorsque la torsion est nulle les coefficients de la connexion sont identiques aux symboles de Christoffel. Dans ce cas on peut exprimer la partie du tenseur de courbure qui dépend des dérivées des symboles de Christoffel en fonction des dérivées secondes du tenseur métrique. La relation (7) est alors évidente.

4. Les identités de Bianchi de seconde espèce

Différencions l'équation (3c) :

$$d\Omega^{a}_{.b} = d\omega^{a}_{.c} \wedge \omega^{c}_{.b} - \omega^{a}_{.c} \wedge d\omega^{c}_{.b}$$

et en utilisant à nouveau l'équation (3c) :

$$d\Omega^{a}_{.b} = \Omega^{a}_{.c} \wedge \omega^{c}_{.b} - \omega^{a}_{.c} \wedge \Omega^{c}_{.b} \qquad (8a)$$

qui sont les équations de Bianchi de seconde espèce, et qui sont vraies quelle que soit la torsion. Explicitons ces relations :

$$2\, d\Omega^{a}_{.b} = dR^{a}_{.bcd} \wedge \omega^{c} \wedge \omega^{d} + R^{a}_{.bcd}\, d\omega^{c} \wedge \omega^{d} - R^{a}_{.bcd}\, \omega^{c} \wedge d\omega^{d}$$

et utilisons les équations (2b), on arrive alors à :

$$\left(dR^{a}_{.bcd} - R^{a}_{.bfd}\,\omega^{f}_{.c} - R^{a}_{.bce}\,\omega^{e}_{.d} - R^{a}_{.ecd}\,\omega^{e}_{.b} + R^{e}_{.bcd}\,\omega^{a}_{.e}\right) \wedge \omega^{c} \wedge \omega^{d}$$
$$= \left(R^{a}_{.bce}\,\Sigma^{e}_{.df} - R^{a}_{.bef}\,\Sigma^{e}_{.cd}\right)\, \omega^{c} \wedge \omega^{d} \wedge \omega^{f}$$

que nous écrirons, en posant $d_f = h^{\alpha}_{f}\, d_{\alpha}$:

$$D_f R^{a}_{.bcd}\, \omega^{c} \wedge \omega^{d} \wedge \omega^{f} = -\, 2\, R^{a}_{.bef}\, \Sigma^{e}_{.cd}\, \omega^{c} \wedge \omega^{d} \wedge \omega^{f} \qquad (8b)$$

soit en explicitant :

$$D_f R^{a}_{.bcd} + D_c R^{a}_{.bdf} + D_d R^{a}_{.bfc} = -2\, \left(R^{a}_{.bef}\,\Sigma^{e}_{.cd} + R^{a}_{.bec}\,\Sigma^{e}_{.df} + R^{a}_{.bed}\,\Sigma^{e}_{.fc}\right) \qquad (8c)$$

Les identités de Bianchi seront utilisées au chapitre 14 pour discuter des espaces à courbure constante , au chapitre 15 et au chapitre 18 pour l'étude des espaces symétriques . Au chapitre 16 , consacré aux théories de jauge , nous verrons qu'elles sont l'équivalent des équations de Maxwell sans source de l'électromagnétisme .

Exercice 3. Quel est le nombre de composantes indépendantes du tenseur de courbure si la torsion est nulle ?

5. Dérivation absolue pour les formes.

Considérons une forme de degré 1 : $\theta^{a} = a^{a}_{\alpha}\, dx^{\alpha}$. C'est un vecteur car dx^{α} est un vecteur par rapport aux changements de coordonnées, et a^{a}_{α} est un tenseur. La différentielle absolue de ce dernier est d'après (9.14) :

$$Da^{a}_{\alpha} = da^{a}_{\alpha} + \Gamma^{a}_{.b\gamma}\, dx^{\gamma}\, a^{b}_{\alpha} - \Gamma^{\beta}_{.\alpha\gamma}\, dx^{\gamma}\, a^{a}_{\beta}$$

On pose comme pour un vecteur :

$$Ddx^{\mu} = ddx^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{.\rho\eta}\, dx^{\eta} \wedge dx^{\rho} = \Gamma^{\mu}_{.\rho\eta}\, dx^{\eta} \wedge dx^{\rho}$$

Si on écrit ($p = 0$, degré de la forme élémentaire a^{a}_{α}) :

$$D\theta^{a} = Da^{a}_{\alpha} \wedge dx^{\alpha} + (-1)^{p}\, a^{a}_{\alpha} \wedge Ddx^{\alpha}$$

On obtient : $D\theta^{a} = d\theta^{a} + \omega^{a}_{.b} \wedge \theta^{b}$

conformément au fait que θ^{a} est un vecteur.

Maintenant considérons deux formes de degré 1 : $\theta^a = a^a_\alpha \, dx^\alpha$ et $\varphi^a = b^a_\alpha \, dx^\alpha$, en suivant les règles du calcul tensoriel on doit avoir :

$$D\left(\theta^a \wedge \varphi^b\right) = d\left(\theta^a \wedge \varphi^b\right) + \omega^a_{\ .c} \wedge \left(\theta^c \wedge \varphi^b\right) + \omega^b_{\ .d} \wedge \left(\theta^a \wedge \varphi^d\right)$$

on vérifie alors facilement que cette expression se met sous la forme (où p est le degré de θ^a):

$$D\left(\theta^a \wedge \varphi^b\right) = D\theta^a \wedge \varphi^b + (-1)^p \, \theta^a \wedge D\varphi^b \tag{9}$$

Cette formule, qui généralise (5.4) s'étend à des formes de degré quelconque.

6. Généralisation du commutateur des dérivées absolues.

Soit un vecteur, un tenseur ou une forme quelconques, on définit :

$$D_a = h^\alpha_a \, D_\alpha$$

Reconsidérons la formule du commutateur des dérivées absolues (9.23), (9.24), et calculons le commutateur suivant, où T désigne un tenseur quelconque pour lequel, par simplicité, nous ne notons pas les indices :

$$\begin{aligned}\left[D_a , D_b\right] T &= h^\gamma_a D_\gamma (h^\delta_b D_\delta T) - h^\delta_b D_\delta (h^\gamma_a D_\gamma T) \\ &= (h^\gamma_a \, D_\gamma h^\delta_b - h^\gamma_b \, D_\gamma h^\delta_a) \, D_\delta T + h^\gamma_a \, h^\delta_b \left[D_\gamma , D_\delta\right] T\end{aligned}$$

Le calcul de $D_\gamma h^\delta_b$ concerne les deux indices δ et b (voir ci-après) , donc :

$$D_\gamma h^\delta_b = \partial_\gamma h^\delta_b + \Gamma^\delta_{\ .\epsilon\gamma} \, h^\epsilon_b - \Gamma^e_{\ .b\gamma} \, h^\delta_e$$

et en utilisant (9.9a) : $D_\gamma h^\delta_b = 0$ et donc :

$$\left[D_a , D_b\right] T = h^\gamma_a \, h^\delta_b \left[D_\gamma , D_\delta\right] T \tag{10}$$

L'équation (10) résulte du fait que si T est un tenseur , DT est encore un tenseur , et les h^a_α , h^α_a , sont les matrices qui font passer des repères naturels aux repères mobiles et réciproquement (voir chapitre 9 , section 3) .

Pour comprendre le point technique ci-dessus on va reprendre le calcul de manière légèrement différente . Pour illustrer on suppose que T porte deux indices , par exemple : $T = T^{b\beta}$. On va calculer : $D_e D_f \, T = h^\gamma_e D_\gamma (h^\delta_f D_\delta T)$.

On pose : $U^{b\beta}_f = h^\delta_f D_\delta T^{b\beta}$ et avec (9.14) on a :

$$D_e D_f \, T = h^\gamma_e D_\gamma (U^{b\beta}_f) = h^\gamma_e \left(\partial_\gamma U^{b\beta}_f + \Gamma^b_{\ .c\gamma} \, U^{c\beta}_f + \Gamma^\beta_{\ .\epsilon\gamma} \, U^{b\epsilon}_f - \Gamma^d_{\ .f\gamma} \, U^{b\beta}_d\right)$$

Avec : $\partial_\gamma U^{b\beta}_f = \partial_\gamma h^\delta_f \, D_\delta T^{b\beta} + h^\delta_f \, \partial_\gamma D_\delta T^{b\beta}$

et , d'après (9.9a) : $\partial_\gamma h^\delta_f = \Gamma^c_{\ .f\gamma} \, h^\delta_c - \Gamma^\delta_{\ .\mu\gamma} \, h^\mu_f$

on obtient : $D_e D_f \, T = h^\gamma_e \, h^\delta_f D_\gamma D_\delta T^{b\beta}$, d'où découle (10) .

7. Une autre formulation pour les équations de structure.

Les équations de structure (2) peuvent être considérées comme des équations différentielles pour les h^a_α , à quelles équations cela correspond il pour les h^α_a ?

Les équations de structure sont :

$$\partial_\nu h^a_\mu - \partial_\mu h^a_\nu + \Gamma^a_{.b\nu} h^b_\mu - \Gamma^a_{.b\mu} h^b_\nu = 2\,\Sigma^a_{.bc}\, h^b_\mu h^c_\nu$$

en utilisant : $h^\alpha_a h^a_\beta = \delta^\alpha_\beta \quad \Rightarrow \quad dh^\alpha_a = -h^\beta_a h^\alpha_b\, dh^b_\beta$, on a :

$$\begin{aligned} h^\nu_a \partial_\nu h^\mu_b &= - h^\nu_a h^\mu_c h^\alpha_b \partial_\nu h^c_\alpha \\ &= - h^\nu_a h^\mu_c h^\alpha_b \left(\partial_\alpha h^c_\nu - \Gamma^c_{.d\nu} h^d_\alpha + \Gamma^c_{.d\alpha} h^d_\nu + 2\,\Sigma^c_{.ef} h^e_\alpha h^f_\nu\right) \end{aligned}$$

soit en utilisant à nouveau l'identité précédente :

$$h^\nu_a \partial_\nu h^\mu_b = h^\mu_c h^\alpha_b h^c_\nu \partial_\alpha h^\nu_a - h^\nu_a h^\mu_c h^\alpha_b \left(-\Gamma^c_{.d\nu} h^d_\alpha + \Gamma^c_{.d\alpha} h^d_\nu + 2\,\Sigma^c_{.ef} h^e_\alpha h^f_\nu\right)$$

et finalement :

$$\left[h_a, h_b\right] = C^c_{.ab} h_c \quad , \quad C^c_{.ab} = \Gamma^c_{.ba} - \Gamma^c_{.ab} + 2\,\Sigma^c_{.ab} \tag{11}$$

Il faut noter que si $\eta_{ab} = Cte$ on a $\Gamma_{cab} = - \Gamma_{acb}$, mais, que même si la torsion est nulle ,on n'a pas $\Gamma^c_{.ab} = \Gamma^c_{.ba}$, à cause de (9.9).

Inversement supposons que les champs de vecteurs $\{\overrightarrow{h_a}\}$ satisfassent des relations du genre :

$$\left[h_a, h_b\right] = C^c_{.ab} h_c$$

que peut-on dire des formes $\omega^a = h^a_\alpha\, dx^\alpha$?

On a : $\partial_\nu h^a_\mu = - h^c_\mu h^a_\rho \partial_\nu h^\rho_c$, et d'après l'hypothèse :

$$\partial_\nu h^a_\mu = - h^c_\mu h^a_\rho \left(h^d_\nu h^\beta_c \partial_\beta h^\rho_d + C^e_{.dc} h^\rho_e h^d_\nu\right)$$

ce qui se réduit à : $\partial_\nu h^a_\mu = h^c_\mu h^a_\rho h^\rho_d h^\beta_c \partial_\beta h^d_\nu - h^c_\mu h^a_\rho C^e_{.dc} h^\rho_e h^d_\nu = \partial_\mu h^a_\nu - h^c_\mu h^d_\nu C^a_{.dc}$

soit encore : $$\partial_\nu h^a_\mu - \partial_\mu h^a_\nu = C^a_{.cd} h^c_\mu h^d_\nu$$

On peut toujours poser arbitrairement $C^c_{.ab} = \Gamma^c_{.ba} - \Gamma^c_{.ab} + 2\,\Sigma^c_{.ab}$, ce qui est insuffisant pour trouver la connexion, mais qui permet de ramener le système au système (2b). En conclusion (11) et (2b) sont des formulations équivalentes.

Exercice 4.
Dans l'exemple des coordonnées sphériques à la section 8.1, les vecteurs $\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\varphi}$, formant un système orthonormé, ont été définis. Calculer leurs commutateurs. Pour cela passer en coordonnées cartésiennes.

8. Les coefficients de la connexion en fonction des commutateurs.

L'équation (11) montre qu'il existe une relation entre les coefficients de la connexion et les commutateurs. Nous pouvons la re écrire :

$$\Gamma_{cba} - \Gamma_{cab} = \eta_{cd} C^d_{.ab} - 2\,S_{cab} \tag{12}$$

Dans le cas d'une famille de repères mobiles $\{\overrightarrow{h_a}\}$ pas nécessairement orthonormés mais tels que les $\eta_{ab} = \overrightarrow{h_a} . \overrightarrow{h_b}$ soient des constantes on a en plus : $\Gamma_{cba} = - \Gamma_{bca}$.

Pour trouver une relation entre les coefficients de la connexion et les commutateurs des champs $\{\overrightarrow{h_a}\}$, on re écrit (12) en effectuant une permutation circulaire des indices c, b, a , et on somme les trois équations ainsi obtenues. Compte tenu de la contrainte ci dessus on obtient :

$$2\,\Gamma_{abc} = \eta_{cd} C^d_{.ab} - \eta_{bd} C^d_{.ca} - \eta_{ad} C^d_{.bc} - 2\,S_{cab} + 2\,S_{bca} + 2\,S_{abc} \tag{13}$$

rappelons que cette formule est obtenue pour des repères mobiles rigides.

9. Matrices de formes différentielles.

Le tenseur de courbure (3b) : $\Omega^{a}_{.b} = \frac{1}{2} R^{a}_{.b\gamma\delta}\, dx^{\gamma} \wedge dx^{\delta}$ peut être considéré comme une matrice Ω de formes différentielles de degré 2 dont a est l'indice des lignes et b celui des colonnes. Nous pouvons ainsi considérer le produit de deux matrices de formes A^{a}_{b} et B^{a}_{b} en appliquant la règle habituelle, à savoir : $C^{a}_{b} = A^{a}_{c} \wedge B^{c}_{b}$.

Soit une variété de dimension $n \geq 2\, m$, on considère la quantité suivante :

$$L_p = Tr\left(\Omega^{m}\right)$$

nous allons montrer, en utilisant les identités de Bianchi de seconde espèce, que L_p est une forme fermée. On notera que si m est impair $L_p = 0$, par la propriété de la $trace$ et $\Omega_{ab} = -\ \Omega_{ba}$, et par le fait que Ω_{ab} étant de degré 2 : $\Omega_{ab} \wedge \Omega_{cd} = \Omega_{cd} \wedge \Omega_{ab}$.

On a (Ω est de degré 2) :

$$dL_p = tr\left(d\Omega^{m}\right) = tr\left(d\Omega \wedge \Omega^{m-1} + \Omega \wedge d\Omega \wedge \Omega^{m-2} + \ldots\right)$$

grâce à la propriété de la $trace$ et au fait que Ω est de degré 2 (donc les différents produits commutent au sens des formes), on obtient en utilisant les identités de Bianchi (8a) et en posant $W = \omega^{a}_{.b}$ (forme de degré 1) :

$$dL_p = m\, tr\left(d\Omega \wedge \Omega^{m-1}\right) = m\, tr\left(-\ W \wedge \Omega \wedge \Omega^{m-1} +\ \Omega \wedge W \wedge \Omega^{m-1}\right) = 0$$

Donc $L_p = Tr\left(\Omega^{m}\right)$ est une forme fermée.
En fait il existe un résultat plus général, que nous ne démontrerons pas ici, et qui s'énonce comme suit :
On considère un polynôme $P(M)$ construit avec les éléments d'une matrice M . On dit qu'un tel polynôme est invariant si quelle que soit la matrice régulière T :
$P(T\, M\, T^{-1}) = P(M)$. On peut étendre cette définition au cas où M est une matrice de formes différentielles. Dans le cas du tenseur de courbure la matrice $\Omega^{a}_{.b}$ est constitué d'éléments de degré 2, qui donc commutent entre eux, et donc il n'est pas nécessaire de faire attention à la place des éléments de matrice dans l'expression du polynôme.
Si $P(\Omega)$ est invariant, alors $P(\Omega)$ est une forme fermée.

Etant donné le théorème de Poincaré on peut se poser la question de savoir si L_p est une forme exacte. Nous allons d'abord étudier comment L_p change lors d'une variation infinitésimale de la connexion $W \rightarrow W + \Delta$. Dans la suite le symbole δ représente la variation infinitésimale des quantités et non l'opérateur $*\, d\, *$. En restant au premier ordre :

$$\Omega = dW + W \wedge W \quad \rightarrow \quad \delta\Omega = d\Delta + \Delta \wedge W + W \wedge \Delta$$

$$\delta L_p = tr\left((d\Delta + \Delta \wedge W + W \wedge \Delta) \wedge \Omega^{m-1} + \Omega \wedge (d\Delta + \Delta \wedge W + W \wedge \Delta) \wedge \Omega^{m-2} + \ldots\right)$$

et comme Ω est de degré 2 on peut écrire :

$$\delta L_p = m\, tr\left((d\Delta + \Delta \wedge W + W \wedge \Delta) \wedge \Omega^{m-1}\right)$$

$$= m\, tr\left(d\Delta \wedge \Omega^{m-1} + \Delta \wedge W \wedge \Omega^{m-1} - \Delta \wedge \Omega^{m-1} \wedge W\right)$$

ce qui suggère : $\delta L_p = m\, d\, tr\left(\Delta \wedge \Omega^{m-1}\right)$. Considérons cette dernière expression et évaluons $d\Omega^{m-1}$. On a : $d\Omega^{m-1} = d\Omega \wedge \Omega^{m-2} + \Omega \wedge d\Omega \wedge \Omega^{m-3} + \ldots$. Soit en utilisant les identités de Bianchi:

$$d\Omega^{m-1} = \Omega \wedge W \wedge \Omega^{m-2} - W \wedge \Omega \wedge \Omega^{m-2} + \Omega \wedge \Omega \wedge W \wedge \Omega^{m-3} - \Omega \wedge W \wedge \Omega \wedge \Omega^{m-3} + \ldots$$

les termes s'annulent deux à deux et il reste :

$$d\Omega^{m-1} = -\, W \wedge \Omega^{m-1} + \Omega^{m-1} \wedge W$$

d'où l'on peut écrire :

$$\delta L_p = m\, d\, tr\left(\Delta \wedge \Omega^{m-1}\right) \qquad (14)$$

Prenons par exemple le cas d'une variété M de dimension $n = 2m = 4$ fermée (sans bord), et supposons que la métrique ait une signature euclidienne, $\int_M L_p$ est alors invariant pour tout changement de la connexion.

Nous allons utiliser la formule (14) pour montrer que L_p est une différentielle exacte.

On considère deux connections W_0 et W_1 et la fonction continue du paramètre $t \in [0\,,1]$: $W_t = W_0 + t\left(W_1 - W_0\right)$. On pose $\Omega_t = d W_t + W_t \wedge W_t$, la formule ci dessus permet d'écrire :

$$L_{p_1} - L_{p_0} = m\, d \int_0^1 dt\, tr\left((W_1 - W_0) \wedge {\Omega_t}^{m-1}\right)$$

en prenant comme cas particulier $W_0 = 0$, on obtient :

$$L_p = m\, d \int_0^1 dt\, tr\left(W \wedge {\Omega_t}^{m-1}\right) \qquad (15)$$

Le cas $n = 2m = 4$ donne :

$$tr\,(\Omega \wedge \Omega) = d\, tr\,(W \wedge \Omega - 1/3\, W \wedge W \wedge W)$$

le terme du membre de droite s'appelle terme de Chern Simons.

Exercice 5. Considérons une variété M de dimension $2\,m$ et l'expression

$$P = \epsilon^{a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n}\, \Omega_{a_1 a_2} \wedge \ldots \wedge \Omega_{a_{n-1} a_n}$$

où le tenseur de courbure apparaît m fois. Montrer que, pour une variation infinitésimale de la connexion , P change par une différentielle exacte. Choisir une famille de repères mobiles orthonormés.

Dans le cas $n = 4$ cette expression est reliée à la caractéristique d'Euler-Poincaré (formule de Chern).

Réponse à l'exercice 1.

On écrit : $\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \ldots \wedge \omega^n = \dfrac{1}{n!}\, \overline{\epsilon}_{a_1 \ldots a_n}\, \omega^{a_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{a_n}$

Et en remplaçant les ω^{a_i} , cette expression est :

$$\frac{1}{n!}\, \overline{\epsilon}_{a_1 \ldots a_n}\, h^{a_1}_{\alpha_1} \ldots h^{a_n}_{\alpha_n}\, dx^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\alpha_n} = \frac{1}{n!}\, det\left(h^a_\alpha\right)\, \overline{\epsilon}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}\, dx^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\alpha_n}$$
$$= det\left(h^a_\alpha\right)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$$

or : $det(g_{\alpha\beta}) = det\left(h^a_\alpha\, \eta_{ab}\, h^b_\beta\right) = det\left(\eta_{ab}\right)\, det^2\left(h^a_\alpha\right) = \eta\, det^2\left(h^a_\alpha\right)$

finalement : $\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \ldots \wedge \omega^n = \sqrt{\frac{g}{\eta}}\ dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n = dV$

Réponse à l'exercice 2.

Soit une famille de repères mobiles $\{\overrightarrow{h_a}\}$ et les formes associées (10.1) décrivant le voisinage d'un point x : $\omega^a = h^a_\alpha\, dx^\alpha$. Soit une forme de degré p : $\sigma = \omega^{a_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{a_p}$. On a en utilisant (5.6) :

$$\begin{aligned} *\sigma &= *\left(h^{a_1}_{\alpha_1} \ldots h^{a_p}_{\alpha_p}\ dx^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\alpha_p}\right) \\ &= \frac{\sqrt{g}}{(n-p)!}\, h^{a_1}_{\alpha_1} \ldots h^{a_p}_{\alpha_p}\ \bar{\epsilon}_{\gamma_1 \ldots \gamma_p \beta_1 \ldots \beta_{n-p}}\, g^{\alpha_1\gamma_1} \ldots g^{\alpha_p\gamma_p}\ dx^{\beta_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\beta_{n-p}} \end{aligned}$$

or : $h^{a_1}_{\alpha_1}\, g^{\alpha_1\gamma_1} = h^{\gamma_1}_{b_1}\, \eta^{a_1 b_1}$, donc :

$$*\sigma = \frac{\sqrt{g}}{(n-p)!}\, \eta^{a_1 b_1} \ldots \eta^{a_p b_p}\ \bar{\epsilon}_{\gamma_1 \ldots \gamma_p \beta_1 \ldots \beta_{n-p}}\ h^{\gamma_1}_{b_1} \ldots h^{\gamma_p}_{b_p}\ h^{\beta_1}_{c_1} \ldots h^{\beta_{n-p}}_{c_{n-p}}\ \omega^{c_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{c_{n-p}}$$

$$*\sigma = \frac{\sqrt{g}}{(n-p)!}\, \eta^{a_1 b_1} \ldots \eta^{a_p b_p}\ det\left(h_{b_1} \ldots h_{b_p} h_{c_1} \ldots h_{c_{n-p}}\right)\ \omega^{c_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{c_{n-p}}$$

$$*\sigma = \frac{\sqrt{g}}{(n-p)!}\, \eta^{a_1 b_1} \ldots \eta^{a_p b_p}\ det(h)\ \bar{\epsilon}_{b_1 \ldots b_p c_1 \ldots c_{n-p}}\ \omega^{c_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{c_{n-p}}$$

enfin on a : $\frac{1}{g} = det\left(g^{\alpha\beta}\right) = det\left(h^{\alpha_i}_{a_i}\, \eta^{a_i b_i}\, h^{\beta_i}_{b_i}\right) = det^2\left(h_{a_i}\right)\, det\left(\eta^{ab}\right)$

donc finalement :

$$*\left(\omega^{a_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{a_p}\right) = \frac{\sqrt{det(\eta_{ab})}}{(n-p)!}\, \eta^{a_1 b_1} \ldots \eta^{a_p b_p}\ \bar{\epsilon}_{b_1 \ldots b_p c_1 \ldots c_{n-p}}\ \omega^{c_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{c_{n-p}}$$

que l'on peut comparer à la définition (5.6).

Réponse à l'exercice 3.

Le tenseur de courbure R_{abcd} a 4 indices, mais étant données les relations d'anti-symétrie sur les deux premiers et sur les deux derniers indices respectivement on peut le noter : R_{AB} , où A représente la paire (a, b) et B la paire (c, d) . A et B ont $m = n(n-1)/2$ éléments. Maintenant en l'absence de torsion, on a d'après (7) : $R_{AB} = R_{BA}$, et donc le nombre de composantes indépendantes est $N = m(m+1)/2$. Mais il faut tenir compte des identités de Bianchi de première espèce (5), qui vont réduire ce nombre . Ecrivons les :

$$R_{abcd} + R_{adbc} + R_{acdb} = 0$$

Si trois ou quatre indices sont égaux l'identité est satisfaite de par les relations de symétrie du tenseur de courbure. Si deux indices sont égaux, par exemple $c = a$, on a encore une identité déjà utilisée, à savoir : $R_{abad} = R_{adab}$. Il faut donc considérer le cas où tous les indices sont différents. Ecrivons pour un quadruplet d'indices fixé les quatre équations possibles :

$$\begin{aligned} R_{abcd} + R_{adbc} + R_{acdb} &= 0 \\ R_{bacd} + R_{bdac} + R_{bcda} &= 0 \\ R_{cdab} + R_{cabd} + R_{cbda} &= 0 \end{aligned}$$

$$R_{dabc} + R_{dbca} + R_{dcab} = 0$$

La somme de ces équations se réduit à $R_{acbd} = R_{bdac}$, contrainte déjà utilisée, et par conséquent ces équations n'apportent pas quatre contraintes indépendantes. De plus la deuxième se déduit de la première en utilisant les relations de symétrie. De même la troisième se déduit de la première. Par conséquent, pour un quadruplet d'indices (tous différents) donné, les identités de Bianchi de première espèce fournissent une seule contrainte.
Finalement le nombre de composantes du tenseur de courbure indépendantes dans le cas sans torsion est (pour $n \geq 4$) : $N = m(m+1)/2 - C_n^4$
Soit : $N = n^2\,(n^2 - 1)\,/12$

Réponse à l'exercice 4.
En coordonnées cartésiennes les vecteurs sont :

$$u_r = \begin{bmatrix} x/r \\ y/r \\ z/r \end{bmatrix} \quad , \quad u_\theta = \begin{bmatrix} xz/r\rho \\ yz/r\rho \\ -\rho/r \end{bmatrix} \quad , \quad u_\varphi = \begin{bmatrix} -y/\rho \\ x/\rho \\ 0 \end{bmatrix}$$

où : $r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad , \quad \rho^2 = x^2 + y^2$
Le calcul direct donne :

$$\left[\overrightarrow{u_r}\,,\overrightarrow{u_\theta}\right] = -\,\frac{1}{r}\,\overrightarrow{u_\theta} \quad , \quad \left[\overrightarrow{u_\varphi}\,,\overrightarrow{u_r}\right] = \frac{1}{r}\,\overrightarrow{u_\varphi} \quad , \quad \left[\overrightarrow{u_\theta}\,,\overrightarrow{u_\varphi}\right] = -\,\frac{z}{r\rho}\,\overrightarrow{u_\varphi}$$

Réponse à l'exercice 5.
On a d'après (3) : $\Omega_{ab} = d\omega_{ab} + \omega_{a.}^{\;c} \wedge \omega_{cb}$ et si on choisit une famille de repères mobiles orthonormés $\omega_{ab} = -\,\omega_{ba}$. Les variations (représentées par le symbole δ , qui ici n'est pas l'opérateur $*\,d\,*$) sont au premier ordre :

$$\delta\Omega_{ab} = d\delta\omega_{ab} + \delta\omega_{a.}^{\;c} \wedge \omega_{cb} + \omega_{a.}^{\;c} \wedge \delta\omega_{cb}$$

$$\delta P = \ldots + \epsilon^{a_1 a_2 \cdots a_{i-1} a_i \cdots a_{n-1} a_n}\,\Omega_{a_1 a_2} \wedge \ldots \wedge \delta\Omega_{a_{i-1} a_i} \wedge \ldots \wedge \Omega_{a_{n-1} a_n} + \ldots$$

puisque tous les indices sont sommés on peut échanger leur nom :

$$a_i \leftrightarrow a_2 \qquad , \qquad a_{i-1} \leftrightarrow a_1$$

et puisque les formes différentielles qui constituent P sont de degré 2, on peut par permutation écrire finalement :

$$\delta P = m\,\epsilon^{a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n}\left[d\delta\omega_{a_1 a_2} + \delta\omega_{a_1 b} \wedge \omega^{b}_{.\,a_2} + \omega_{a_1.}^{\;\;b} \wedge \delta\omega_{b a_2}\right] \wedge \Omega_{a_3 a_4} \wedge \Omega_{a_5 a_6} \wedge \ldots$$

pour le troisième terme du crochet, on change le nom des indices, et puisque $\omega_{ab} = -\,\omega_{ba}$ et que la connexion est une forme de degré 1, on a :

$$\delta P = m\,\epsilon^{a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n}\left[d\delta\omega_{a_1 a_2} + 2\,\delta\omega_{a_1 b} \wedge \omega^{b}_{.\,a_2}\right] \wedge \Omega_{a_3 a_4} \wedge \Omega_{a_5 a_6} \wedge \ldots$$

soit encore :

$$\delta P = m\,d\left[\epsilon^{a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n}\,\delta\omega_{a_1 a_2} \wedge \Omega_{a_3 a_4} \wedge \ldots \wedge \Omega_{a_{n-1} a_n}\right]$$
$$+\; m\,\epsilon^{a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n}\left[\,2\,\delta\omega_{a_1 b} \wedge \omega^{b}_{.\,a_2} \wedge \Omega_{a_3 a_4} \wedge \ldots\right]$$

$$+m\epsilon^{a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n}\left[\delta\omega_{a_1a_2}\wedge d\Omega_{a_3a_4}\wedge\Omega_{a_5a_6}\wedge\,\ldots\,+\,\delta\omega_{a_1a_2}\wedge\Omega_{a_3a_4}\wedge d\Omega_{a_5a_6}\wedge\,\ldots\,+\,\ldots\right]$$

maintenant on utilise les identités de Bianchi. Le premier terme du troisième crochet du membre de droite devient :

$$\delta\omega_{a_1a_2}\wedge\Omega_{a_3\,d}\wedge\omega^{d}_{\,.\,a_4}\wedge\Omega_{a_5\,a_6}\wedge\,\ldots\,-\delta\omega_{a_1a_2}\wedge\omega_{a_3\,d}\wedge\Omega^{d}_{\,.\,a_4}\wedge\Omega_{a_5\,a_6}\wedge\,\ldots$$

soit en échangeant les indices $a_3\leftrightarrow a_4$ devient :

$$-2\,\delta\omega_{a_1a_2}\wedge\omega_{a_3\,d}\wedge\Omega^{d}_{\,.\,a_4}\wedge\Omega_{a_5\,a_6}\wedge\,\ldots$$

et finalement :

$$\delta P=m\,d\,\left[\epsilon^{a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n}\,\delta\omega_{a_1\,a_2}\wedge\Omega_{a_3\,a_4}\wedge\,\ldots\,\wedge\Omega_{a_{n-1}\,a_n}\right]\;+\;2\,m\,\epsilon^{a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n}$$

$$\left[\delta\omega_{a_1b}\wedge\omega^{b}_{\,.\,a_2}\wedge\Omega_{a_3\,a_4}\wedge\,\ldots\,-\delta\omega_{a_1a_2}\wedge\omega_{a_3d}\wedge\Omega^{d}_{\,.\,a_4}\wedge\,\ldots\,-\delta\omega_{a_1a_2}\wedge\Omega_{a_3a_4}\wedge\omega_{a_5d}\wedge\Omega^{d}_{\,.\,a_6}\wedge\,\ldots\,+\,\ldots\right]$$

maintenant le but est de montrer que le second terme du membre de droite est nul, et désormais on ne considère que ce dernier. Par exemple pour le premier terme, b peut prendre seulement les valeurs $a_3,a_4,\ldots,a_n$, de même dans le deuxième terme d ne peut être égal qu'à $a_1,a_2,a_5,a_6,\ldots,a_n$. En examinant les cas possibles on vérifie que les termes se compensent ou sont identiques. S'ils sont identiques on a des contributions de la forme :

$$\Omega_{ax}\,\Omega_{bx}\,\epsilon^{ab}=\frac{1}{2}\,\left(\Omega_{ax}\,\Omega_{bx}\,\epsilon^{ab}+\Omega_{bx}\,\Omega_{ax}\,\epsilon^{ba}\right)\;=\;0$$

Et finalement :

$$\delta P=m\,d\,\left[\epsilon^{a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n}\,\delta\omega_{a_1\,a_2}\wedge\Omega_{a_3\,a_4}\wedge\,\ldots\,\wedge\Omega_{a_{n-1}\,a_n}\right]$$

δP est donc une différentielle exacte. Pour une variété fermée sans bord $\int P$ est invariant pour un changement quelconque de la connexion.

Annexe.

Lors du calcul des sections efficaces de réaction entre particules on est souvent amené, si des photons sont produits, à calculer la valeur moyenne des probabilités de transition en moyennant sur les états de polarisation de ces photons. Un photon , de quadri impulsion k , considéré comme libre dans la théorie des perturbations, a une fonction d'onde du genre $\vec{e}\,e^{ikx}$ où $\vec{e}$ représente l'état de polarisation du photon. Il y a deux états de polarisation possibles.

On appelle $e_i^\alpha\;=\;(0\,,\vec{e_i})$ les vecteurs polarisation des photons ($i\,=\,1\,,2$) , et $k^\alpha=(k^0,\vec{k})$ leur quadri impulsion qui est de module nul : $k^2=0$ (puisque le photon est une particule de masse nulle). D'après la condition de Lorentz (section 7.3) ($\partial_\alpha A^\alpha=0$) le vecteur polarisation est transverse : $k\,.\,\vec{e_i}=0$. Les polarisations sont choisies orthogonales entre elles. On a donc trois vecteurs pour former un repère local, et on les complètera par un quatrième quadri vecteur arbitraire c^α pour former une base de 4 quadri vecteurs (une tétrade) que l'on rangera dans l'ordre suivant : $\{\vec{h_a}\}=(e_1,e_2,k,c)$.

La condition supplémentaire $c\,.\,e_i=0$, que l'on imposera, s'appelle jauge axiale. Le tenseur η_{ab} est donné par les produits scalaires des quadri-vecteurs formant le repère mobile que l'on vient de définir :

$$\eta_{a\,b}\;=\;\begin{bmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&0&kc\\0&0&kc&c^2\end{bmatrix}\quad,\quad\eta^{a\,b}\;=\;\begin{bmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-c^2/(kc)^2&1/kc\\0&0&1/kc&0\end{bmatrix}$$

d'où l'on déduit en utilisant la relation $h_a^\alpha h_b^\beta \eta^{ab} = g^{\alpha\beta}$:

$$\sum_{i=1}^{2} e_i^\alpha \, e_i^\beta = - \, g^{\alpha\beta} + \frac{k^\alpha c^\beta + k^\beta c^\alpha}{k \, . \, c} - \frac{k^\alpha k^\beta c^2}{(k \, . \, c)^2}$$

qui sert à calculer le « propagateur » du photon dans la jauge axiale.